

Numéro d'ordre D.U. : 1008

UNIVERSITE BLAISE PASCAL
(U.F.R. de Recherche Scientifique et Technique)

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N ° : 180

THESE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE
(Spécialité : physique corpusculaire)

par

Dominique MARCHAND
Diplômée d'Etudes Approfondies

**CALCUL DES CORRECTIONS RADIATIVES A LA
DIFFUSION COMPTON VIRTUELLE**

**MESURE ABSOLUE DE L'ENERGIE DU FAISCEAU
D'ELECTRONS DE JEFFERSON LAB. (HALL A) PAR UNE
METHODE MAGNETIQUE : PROJET ARC**

soutenue publiquement le 17 avril 1998, devant la commission d'examen :

J.C. MONTRET Président
P.Y. BERTIN
J.M. de CONTO
J. FELTESSE
N. d'HOSE Rapporteur
K. de JAGER
L.C. MAXIMON Rapporteur
P. VERNIN

à mon frère Didier

Remerciements

En tout premier lieu, 10[∞] mercis à Pascal Vernin pour ces quatre années inoubliables passées ensemble. Je ne te remercierai jamais assez de m'avoir donné la chance de travailler avec toi et de m'avoir toujours supportée. La physique, ta passion que tu as su me transmettre, m'a enthousiasmée à jamais. ARC m'a fait chavirer, les corrections radiatives m'ont fait rayonner et les margaritas empanner ! Tout n'est qu'une question de précision ... A tes côtés, j'ai beaucoup appris et ai tenté, avec passion, de garder le cap que tu m'indiquais avec clarté. Dans la tempête de la rédaction, j'ai dû prendre deux ris mais, là encore, tu étais à l'écoute. L'avenir reste à écrire mais il est certain que jamais je n'oublierai cette navigation scientifique en équipage ...

Disponibilité, pédagogie, patience et confiance s'associent sans nul doute à Nicole d'Hose qui m'a encouragée et accompagnée tout au long de mon pèlerinage scientifique. Nicole, une fois encore, je suis très heureuse que tu aies accepté la lourde tâche de rapporteur malgré toutes tes responsabilités.

Merci à monsieur Leonard Maximon, professeur de l'université George Washington, d'avoir donné de son temps pour rédiger un rapport sur mon travail de thèse et d'avoir ensuite pris part à mon jury. Vous connaissant à travers vos articles, ce fût un honneur et un réel plaisir de vous rencontrer à l'occasion de ma soutenance. Je vous remercie sincèrement pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail et pour tous les commentaires précieux dont vous m'avez fait part.

Je remercie messieurs Jean Mougey, Jacques Martino, Guy Fournier et Bijan Saghāi de m'avoir accueillie au Service de Physique Nucléaire où je me suis pleinement épanouie durant toute la durée de ma thèse. Monsieur Mougey, le programme culturel de Williamsburg restera à jamais ancré dans ma mémoire tout comme les répétitions ensablées avec Guy à Maubuisson. Je n'oublierai pas non plus le support et le soutien constant de mon cher voisin Bijan et les nombreuses discussions avec Jacques. A jamais, je me souviendrai du soutien spontané dont j'ai bénéficié au sein du service et du département. Merci à vous quatre pour le dynamisme et l'enthousiasme qui règne au sein du SPhN.

Je remercie sincèrement monsieur Jean-Claude Montret, professeur de l'université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse après m'avoir fait découvrir le monde subatomique.

Merci à Pierre-Yves Bertin, mon directeur de thèse, qui a su, au moment opportun, me transmettre ses conseils avisés en matière de rédaction. "ep" et ARC : même défi !

J'ai beaucoup apprécié et suis très honorée que messieurs Jean-Marie de Conto, Kees de Jager et Joël Feltess aient accepté de faire partie de mon jury. Merci à tous pour vos commentaires éclairés. Je tiens également à remercier monsieur André Tkatchenko pour ses précieux conseils et regrette qu'il n'ait finalement pas pu se libérer pour prendre part à mon jury.

Merci à mes chers collaborateurs patients du SGPI : les pilotes chevronnés d'Euclide, j'ai nommé Patrick Girardot, Guy Leroux, Jean-François Millot et Jean-Philippe Mols, notre conseiller éclairé Michel Maurier, Jean-Christian Toussaint chargé des affaires et Jean-Dominique Douarin pour notre planning dynamique. Côté photos et retirages, je remercie

sincèrement Jean-Jacques Bigot pour sa disponibilité et sa bonne humeur. Merci également à Jean-Claude Saudemont de m'avoir invitée à participer à ce voyage d'étude inoubliable à Grenoble. Pour les avoir côtoyés au sein du service de gestion des programmes et ingénierie, je n'oublierai pas messieurs Joël Beltramelli, Jean-Claude Catenne, Claude Curé, Louis Gosset, Michel Masson, Hubert Van-Hille, Bernard Peyaud ainsi que Madame Sabine Cantet. J'ajoute que c'est dans ce service que j'ai eu la joie de rencontrer Nathalie Colombel, la plus mécanicienne des équipières au long cours, à qui je transmets toute mon amitié.

Les plans dressés, on passe naturellement à la réalisation, les modifications éventuelles, l'électronique et le contrôle-commande. Ce fut là le domaine de prédilection des services d'ingénierie générale et des techniques de cryogénie et de magnétisme. Pour tout ce que j'ai appris à leurs côtés et tous les bons moments inoubliables passés ensemble, je remercie sincèrement Christian Veyssière, Bernard Mazeau, Romain Berthier, Gaëlle Coadoux, Gilles Dispau, Laurent Dolizy, André Donati, Jean-Claude Languillat, Denis Loiseau, Xavier Martin, Joachim Neves Da Costa, Serge Tissier et Jean-Claude Sellier. Merci aux rois d'EPICS, j'ai nommé Françoise Gougnaud, Jean-François Gournay, Guy Matichard, Richard Azoulay et Yves Lussignol, de m'avoir entrouvert pédagogiquement cette fameuse boîte noire. Loin de moi l'idée de passer sous silence la fine équipe des mesures magnétiques et des tests au CERN constituée de François Kircher, Jean-Claude Bonrepaux, Jacques Fabre, Michel Humeau, René Leboeuf et Sylvie Regnaud. Dois-je rappeler les scores au bowling ?? Grand merci également à François-Paul Juster pour ses encouragements lorsque la température augmentait... En outre, pour les premiers tests du profileur auprès de MACSE, je tiens à remercier toute l'équipe du service d'étude des accélérateurs pour leur collaboration active dans cette entreprise.

Merci à l'équipe des géomètres du CERN pour leurs conseils concernant la méthode de mesure d'angle. Merci également à messieurs Cornuet, Billan et Henrichsen du CERN pour leurs précieux conseils en matière de mesures magnétiques et pour nous avoir permis d'utiliser leur dipôle de référence. J'adresse également mes plus vifs remerciements à monsieur Jean-Claude Callier pour ses conseils techniques en matière de théodolites.

Je tiens à remercier l'équipe des mesures magnétiques de Saturne, en particulier mesdames Malgorzata Tkatchenko et Corinne Evesque, pour l'étude préliminaire qu'elles ont effectuée.

Merci à Messieurs Queyrrou et Falvard, responsables du D.E.A. de Clermont-Ferrand, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail de thèse. Je remercie également vivement messieurs Cornet, Massaux et Dupont pour leurs encouragements tout au long de mes années d'études au département de Physique.

Grand merci à toute l'équipe "sonde électromagnétique" de Clermont-Ferrand pour son accueil et son soutien durant toute la durée de ma thèse. En particulier, j'adresse mes plus sincères remerciements à Hélène Fonvieille pour son aide en ligne précieuse et son soutien de tous les instants. Sache que je n'oublierai jamais notre séjour imprévu mais studieux à Vierzon ! Je remercie vivement Gilles Quemener, dit le breton bretonnant, et Olivier Ravel, dit Momo, pour leur soutien et leur amitié tout au long de cette aventure qui nous a menés tous trois à TJNAF. Merci également à Vincent breton tout particulièrement pour sa patience lors de la recette des contributions du workshop VCS. Merci à Jacques Berthot et Yves Roblin pour leur collaboration lors des missions outre-Atlantique et outre-Rhin. Muchos Gracias à Michel Brossard, le spécialiste auvergnat des jumbo Margaritas.

Destination TJNAF : "Thanks very much to you all !!" J'adresse mes plus vifs remerciements à tous les physiciens et le personnel du hall A pour leur accueil et leur aide. En outre, je remercie vivement messieurs Leigh Harwood, Jeff Karn, Jean-Claude Denard, Chen Yan, Samuel, Paul Gueye, Myke Tiefenback et tout le personnel de la MCC pour leur collaboration. Grand merci à Charles Hyde-Wright pour son soutien et ses précieux conseils. Je remercie également vivement Latifa, Alan Gavalya et Joyce Miller pour leur amitié et leurs soirées gastronomiques.

"Danke Schön" à toute l'équipe du hall A1 du département de physique nucléaire de l'université de Mainz pour l'émulation et le dynamisme qui règne au sein de ce laboratoire. J'adresse mes plus sincères remerciements à monsieur le Professeur Dietrich Von Harrach et à Frank Maas pour leur soutien et leur collaboration lors de ma candidature à une bourse de la fondation Alexander Von Humboldt. J'espère vivement que ce projet se concrétisera dans un avenir proche.

Je remercie très sincèrement et très chaleureusement messieurs Jacques Arvieux et Robert Frascaria pour leur appui et leur soutien au regard de ma candidature à une bourse de la fondation Alexander Von Humboldt. Je souhaite vivement l'obtention de cette bourse et espère sincèrement collaborer durablement avec le laboratoire d'Orsay. Je tiens également à remercier Saro Ong pour les nombreuses discussions que nous avons eues.

"Danku" à tous mes amis de l'Université de Gent. Merci à Luc Van Hoorebeke pour toutes les discussions "externes" mais rayonnantes que nous avons eues et pour m'avoir évité de me retrouver dans un champ de pommes de terre. Grand merci au président de l'association des arbres à vaches pour tous les bons moments passés ensemble. J'adresse mes plus vifs remerciements à Robert Van de Vyver pour sa patience au regard de son offre de position post-doctorale. Robert, j'espère très sincèrement avoir l'occasion de travailler au sein de votre équipe si motivante et motivée. Il y aura des langoustines pour l'occasion !!!

Et que seraient les résultats du programme des corrections radiatives sans les contributions actives, théoriques et numériques, de Marc Vanderhaeghen, Jacques Van de Wiele et David Lhuillier, mes compagnons rayonnants en matière de "Gammalogie" et de divergences ? γ -merci à vous trois pour tous les moments intenses d'émulation collective que nous avons vécus ensemble sur ce sujet si passionnant.

Pour leur disponibilité, leur soutien et leur aide au quotidien, je tiens à remercier très chaleureusement Françoise Zutter, Danielle Coret, Jeannette Barathieu, Isabelle Richard et Maryse Diguët. Grand merci à Jacqueline Thiolière pour sa constante bonne humeur et ses conseils éclairés en matière de reprographie. Pour avoir supporté quotidiennement mes doléances matinales, j'adresse mes plus vifs remerciements à Annick et Françoise. Au quotidien toujours, je remercie très sincèrement Maryline Albera pour sa super bonne humeur, son dynamisme et son soutien permanent. En particulier je n'oublierai jamais notre sortie sportive et attends avec impatience un entraînement plus suivi ! Mille mercis à toi et Pierre Besson d'être venus me soutenir jusqu'à Clermont-Ferrand. Sachez que cela m'a beaucoup touchée.

Pour leur disponibilité, leur support "hot line" et "on line", je remercie vivement Alain Chaumeaux, Pierre-François Honoré, Gilbert Grasso et Gilles Tricoche. J'avoue que les pauses matinales "petit déjeuner" en compagnie d'Alain et José ont été de précieux moments et l'occasion de recharger les batteries... Grand merci à Pierre-François qui n'a pas hésité à intervenir sur site lorsque la situation devenait critique. "LinuXement" vôtre !

Je remercie très chaleureusement tous les membres du SPhN pour la "pluriculture" scientifique qu'ils m'ont apportée et les inoubliables discussions informelles. Merci aux chercheurs d'isomères de forme, aux physiciens attachés à GANIL, à Geel, à l'ILL, à feu Saturne, aux équipes T20, SLAC, SMC, PaVi, NOMAD, ALICE et CLAS.

J'adresse mes plus vifs remerciements à notre scintillant Joël Martin, à notre pétillant Gérard Audit et à notre fumant théoricien Pierre Guichon ou Pampam pour l'atmosphère qu'ils ont su créer et dans laquelle je me suis sentie si bien. Merci à toi Pierre de m'avoir si souvent aidée et particulièrement au moment de la rédaction. Je remercie très chaleureusement Gabriel Tamas pour ses conseils avisés et pour les inoubliables moments passés outre-Rhin en manip. Grand merci à Bernard Frois pour ses précieux conseils, ses encouragements et les nombreuses discussions que je n'oublierai jamais. Je tiens également à remercier vivement Gabriele Fioni pour son soutien et son super dynamisme.

Grand merci aux anciens thésards et post-docs du SPhN sur lesquels je me suis appuyée à mon arrivée et qui m'ont insufflé beaucoup d'énergie, j'ai nommé Jean-François Picard, Thierry Gousset, Jean-Christophe David, Michel Guidal et Philippe Grenier mon compatriote auvergnat.

Pour m'avoir encouragée et soutenue sans faiblir, je remercie vivement, très sincèrement et très chaleureusement Julie Roche, Vincent Brindejonc, Rosella Médaglia et Markus Diehl. A parité égale, j'adresse mes plus amicaux remerciements à Christian Cavata et Thierry Pussieux pour leurs précieux conseils et leur disponibilité. Pour sa collaboration active et toujours émulative, je remercie magnétiquement et intégralement mon ami Jacques Marroncle. Merci à lui de m'avoir présenté une équièrre de choc en la personne de Nathalie Judas.

A celle qui, durant ces quatre années au SPhN, a su me transmettre son enthousiasme et sa fureur d'apprendre, à celle qui m'a toujours aidée à faire le point, à surmonter les obstacles et à traverser les tempêtes (2.50m de creux !), j'adresse en recommandé des remerciements Gargantuesques à ma voisine bretonne Sophie Kherhoas-Cavata.

A mon amie choc, ma complice nucléaire isomérique à période infinie, à celle qui m'a soutenue 24h/24 et 7j/7 depuis notre rencontre, à celle qui m'a transmis sa force de réagir, à celle qui m'a balisé le chemin de la rédaction et de la soutenance, je transmets mes plus amicaux et infinis remerciements à Claire Gautherin. Grand merci à Franck Varenne pour ses cours d'approfondissement en physique gomiotique.

J'adresse enfin mes remerciements les plus affectueux à Kiki qui a su m'accompagner, m'aider et me supporter, au propre comme au figuré, durant les longs mois de rédaction. Grand MERCI à mes parents, mes grand-parents, aux amis de mon père, aux familles Cealy, Foucault et Boile sans oublier Eliane et Robert. A tous mes amis, merci ...

Table des matières

I	Corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle sous le seuil de production du pion : application aux cinématiques de CEBAF.	1
1	Motivations Physiques	5
1.1	Concepts des polarisabilités	5
1.2	La diffusion Compton réelle	8
1.2.1	Expériences de diffusion Compton réelle	9
1.2.2	Prédiction des polarisabilités α et β	11
1.2.2.1	Modèle Non Relativiste de Quarks	11
1.2.2.2	Modèles chiraux	12
1.2.2.3	Récapitulation des diverses prédictions	13
1.3	La diffusion Compton virtuelle	13
1.3.1	Introduction	14
1.3.2	Section efficace et amplitude de la réaction de photo-électroproduction	18
1.3.2.1	Variables cinématiques	19
1.3.2.2	Développement de l'amplitude VCS en puissances de q'	23
1.3.2.3	Amplitude totale de photo-électroproduction	24
1.3.3	Polarisabilités Généralisées	25
1.3.3.1	Décomposition de $H_{Non-Born}^{\mu\nu}$ en multipôles	25
1.3.3.2	Principe d'extraction des Polarisabilités Généralisées à partir des sections efficaces expérimentales	28
1.3.3.3	Prédictions des Polarisabilités Généralisées	31
1.4	Conclusion	37
2	Corrections radiatives à la diffusion élastique	41
2.1	Généralités	41
2.2	Corrections radiatives externes	42
2.3	Corrections radiatives internes	45
2.3.1	Introduction	46
2.3.2	Corrections radiatives internes réelles	51
2.3.3	Corrections radiatives internes virtuelles	53
2.3.3.1	Seconde approximation de Born	54
2.3.3.2	Correction de "Self-Energie" de l'électron	56
2.3.3.3	Correction de polarisation du vide	57
2.3.3.4	Correction de vertex	58
2.3.3.5	Récapitulatif des divergences	59

2.3.4	Traitement des divergences	60
2.3.4.1	La régularisation dimensionnelle	61
2.3.4.2	Renormalisation	70
2.3.4.3	Compensation infrarouge	76
2.4	Résultats	79
2.4.1	Exponentiation	80
2.4.2	Détermination de la coupure expérimentale ΔE	81
2.4.3	Application numérique	83
2.5	Conclusion	83
3	Calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle	85
3.1	Cadre du calcul et approximation	86
3.2	Corrections radiatives virtuelles	88
3.2.1	Méthode d'addition-soustraction	90
3.2.2	Renormalisation	95
3.3	Corrections radiatives réelles	97
3.4	Compensation infrarouge	98
3.5	Méthode d'intégration	101
3.5.1	Traitement de l'intégrale la plus interne	101
3.5.1.1	Généralités	102
3.5.1.2	Intégration des fonctions sans singularité	103
3.5.1.3	Intégration des fonctions singulières	105
3.5.2	Intégration numérique	109
3.5.3	Tests significatifs, crédibilité du résultat	112
3.6	Résultats	112
3.6.1	Effet des corrections radiatives virtuelles	113
3.6.2	Erreurs systématiques liées au calcul des corrections radiatives virtuelles	115
3.6.3	Correction des données expérimentales	115
3.6.4	Estimation des corrections radiatives totales	117
3.7	Conclusion	118

II Mesure absolue de l'énergie du faisceau d'électrons pour le hall A de Jefferson Lab. par une méthode magnétique : projet ARC 119

1	Cadre du projet ARC	121
1.1	Jefferson Lab	122
1.1.1	Caractéristiques de l'accélérateur CEBAF à Jefferson Lab	123
1.1.2	Les halls expérimentaux	125
1.1.2.1	Le hall A	125
1.1.2.2	Le hall B	127
1.1.2.3	Le hall C	128
1.2	Nécessité d'une mesure absolue de l'énergie avec une précision de 10^{-4} dans le hall A	129
1.2.1	Les expériences de séparation transverse longitudinale	129

1.2.1.1	Calibration des spectromètres HRS du hall A	134
1.3	Méthodes pour mesurer l'énergie avec une précision de 10^{-4}	136
1.3.1	Méthode par rétrodiffusion Compton	136
1.3.2	Méthode "e-p"	137
1.3.3	Méthode basée sur la précession du spin d'électrons polarisés	138
1.3.4	Méthode magnétique adoptée au SLAC	138
1.4	Méthode magnétique : projet "ARC"	139
1.4.1	Généralités	140
1.4.2	Evaluation des pertes d'énergie par rayonnement synchrotron dans l'arc de déviation	142
1.4.3	Principe de la méthode ARC et précisions requises sur les mesures	144
1.4.3.1	Mesure de l'angle total de déviation du faisceau	144
1.4.3.2	Mesure de l'intégrale de champ magnétique	145
1.4.4	Comparaison ARC / SLAC	146
2	Angle absolu de déviation du faisceau	149
2.1	Mesure de l'angle relatif	149
2.1.1	Bancs de mesure	150
2.1.2	Les profileurs à fils	151
2.1.2.1	Principe de mesure de la position du faisceau	151
2.1.2.2	Description du profileur à fil	152
2.1.2.3	Position de repos et position de référence	153
2.1.2.4	Electronique et contrôle-commande associés	155
2.1.3	Le mode opératoire	157
2.1.4	Traitement des profils	159
2.1.4.1	Correction des défauts éventuels de l'acquisition	161
2.1.4.2	Première détermination des zones de recherche des pics	161
2.1.4.3	Première évaluation du niveau continu	161
2.1.4.4	Première soustraction du niveau continu	161
2.1.4.5	Détermination de la largeur de la base du pic	163
2.1.4.6	Calcul du barycentre du faisceau	163
2.1.4.7	Calcul de la distance (position de référence - barycentre du faisceau)	164
2.1.4.8	Résultat pour l'angle relatif	164
2.2	Mesure de l'angle de référence	167
2.2.1	Principe de la mesure	167
2.2.1.1	Visées directes des mires et visées par autocollimation	170
2.2.1.2	Calibration des paires de miroirs	173
2.2.2	Problème lié à l'autocollimation à grande distance	174
2.2.3	Fréquence des mesures	175
2.2.4	Résultat pour l'angle de référence	176
2.3	Résultat et précisions	178
2.3.1	Bilan des erreurs sur l'angle relatif	179
2.3.2	Bilan des erreurs sur l'angle de référence	182
2.3.3	Précision sur l'angle absolu de déviation du faisceau	184

3	Intégrale absolue de champ magnétique	189
3.1	Dipôle de référence	190
3.2	Mesure de l'intégrale de champ de référence	191
3.2.1	Principe	192
3.2.1.1	Mesure de l'intégrale de champ d'un dipôle par la méthode d'une bobine de mesure en translation	192
3.2.1.2	"Méthode de zéro"	192
3.2.2	Cahier des charges	196
3.2.3	Description mécanique du mesureur	199
3.2.4	Description électronique	204
3.2.5	Bobines de mesure	207
3.2.5.1	Equilibrage dans le dipôle	209
3.2.5.2	Mesure absolue de l'aire magnétique d'une bobine	210
3.2.5.3	Equilibrage dans le quadripôle	211
3.2.5.4	Différence entre les aires magnétiques des deux bobines et correction de la tension d' "offset"	214
3.2.6	Correction d'intégrale courbe	215
3.3	Mesure de l'intégrale relative de champ	217
3.4	Précisions	219
3.4.1	Bilan des incertitudes sur la mesure de l'intégrale de référence	219
3.4.1.1	Dipôle de référence	219
3.4.1.2	Incertitudes liées aux bobines	221
3.4.1.3	Erreur de mesure de B_0	223
3.4.1.4	Erreurs dues au voltmètre intégrateur	224
3.4.1.5	Erreurs dues au codeur	224
3.4.2	Bilan des incertitudes sur la mesure de l'intégrale relative	225
3.4.3	Incertitudes liées au positionnement des aimants dans l'arc	226
3.4.4	Corrections et incertitudes liées aux contributions magnétiques pa- rasites à l'intégrale de champ	230
3.4.4.1	Contribution du champ rémanent des aimants auxiliaires	230
3.4.4.2	Contribution du champ ambiant	231
3.5	Conclusion	235
4	Conclusion sur le projet ARC	237
A	Systèmes d'unité	241
B	Rappels d'électrodynamique quantique	243
B.1	Règles de Feynman	243
B.2	Relations utiles	245
B.3	Paramétrisation de Feynman	245
B.4	Algèbre en D-dimensions :	246
B.5	Intégrales utiles en D-dimensions :	246
C	Compléments au calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique électron-proton	249
C.1	Bremsstrahlung interne	249

D	Intégration des fonctions singulières	253
E	Compléments au calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle	259
E.1	Amplitude des Graphes “Bethe-Heitler”	259
E.2	Graphe BHV1i	260
E.3	Graphe BHV1f	262
E.4	Graphe BHV2i	264
E.5	Graphe BHV2f	266
E.6	Graphe BHV3i	268
E.7	Graphe BHV3f	270
E.8	Graphes BH2i et BH2f	271
F	Méthode basée sur la précession du spin d’électrons polarisés	275
G	Ligne faisceau du hall A	279
H	Contrôle-commande adopté pour le projet ARC : EPICS	283
H.1	Matériels et logiciels “de terrain”	283
H.2	Logiciels de communication	284
H.3	Matériels et logiciels “de salles de contrôle”	284
H.4	Le contrôleur d’entrée/sortie: IOC	284
I	Le théodolite et l’autocollimation	289
I.1	Description du théodolite	289
I.2	Les types de visées	292
I.2.1	L’autocollimation	293
I.2.2	La “collimation croisée”	294
I.3	Compensation des défauts : le retournement	294
J	Effet du roulis et du tangage des paires de miroirs	297
J.1	Effet du roulis des paires de miroirs de déviation et d’autocollimation sur la mesure de l’angle horizontal	297
J.2	Effet du tangage de la paire de miroirs d’autocollimation sur la mesure de l’angle horizontal	298
J.3	Effet du tangage de la paire de miroirs de déviation sur la mesure de l’angle horizontal	300
K	Bobine dans un champ 3D : effets dus à la forme de la bobine	301

Première partie

Corrections radiatives à la diffusion
Compton virtuelle sous le seuil de
production du pion : application aux
cinématiques de CEBAF.

Introduction

L'enjeu fondamental de la diffusion Compton virtuelle sous le seuil de production du pion est d'approfondir nos connaissances sur les propriétés électromagnétiques du proton. Les informations que nous recherchons, baptisées Polarizabilités Généralisées, nécessitent des mesures de très haute précision. Du fait de cette précision et compte-tenu de la faible section efficace de la réaction exclusive étudiée, la réalisation de la diffusion Compton virtuelle a dû attendre la nouvelle génération d'accélérateurs délivrant des faisceaux continus de haute intensité (CEBAF, MAMI, BATES) ainsi que des spectromètres de haute résolution. Comme expérimentalement on accède à la diffusion Compton virtuelle par électroproduction de photons sur le proton, il est vital de maîtriser les effets radiatifs pour obtenir une bonne précision sur les sections efficaces absolues corrigées des erreurs systématiques. Le calcul théorique des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle, équivalant du point de vue de la difficulté au calcul des corrections radiatives au deuxième ordre à la diffusion élastique, constitue l'une des deux parties de mon travail de thèse.

La polarisabilité d'un système caractérise sa réponse à une excitation électrique et/ou magnétique. Un traitement classique, basé sur le modèle de l'atome d'hydrogène de Thomson, permettra d'introduire le concept de polarisabilité. Les expériences de diffusion Compton réelle mesurent les polarisabilités électrique (α) et magnétique (β) du proton à $Q^2 = 0$ (Q^2 : opposé du carré du quadrimoment du photon virtuel échangé). La grande richesse de la diffusion Compton virtuelle ($Q^2 \neq 0$) par rapport à la diffusion Compton réelle est de permettre d'accéder à six nouvelles observables fonctions du quadrimoment du photon virtuel échangé. La définition de ces six Polarizabilités Généralisées dérive du formalisme mis au point par P. Guichon *et al.* dont je donnerai les grandes lignes. Après description du principe d'extraction des Polarizabilités Généralisées à partir de la section efficace expérimentale absolue, je terminerai ce premier chapitre en présentant la valeur prédite de l'effet des Polarizabilités Généralisées. Le faible effet attendu implique de déterminer la section efficace expérimentale absolue corrigée des effets radiatifs avec une précision d'au moins 3%. Par suite, le calcul précis des corrections radiatives prend toute son importance.

Le calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique électron-proton, présenté dans le second chapitre, me servira de base pour le calcul ultérieur des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle. Ce chapitre sera le lieu des définitions et l'occasion d'introduire la technique utilisée pour ce type de calcul théorique. En particulier, je rappellerai la méthode de régularisation dimensionnelle dont nous nous sommes servis pour la diffusion Compton virtuelle.

Le troisième et dernier chapitre de cette partie sera consacré au calcul des corrections radiatives internes à la diffusion Compton virtuelle. Ce calcul inédit est le fruit d'un travail d'équipe. Cette équipe était constituée de M. Vanderhaeghen, D. Lhuillier, J. Van de Wiele et moi-même. En m'appuyant sur le deuxième chapitre, je présenterai d'abord le cadre de notre calcul en insistant sur les approximations que nous avons été amenés à faire. La principale approximation consiste à considérer le proton en omettant ses états excités. Nous nous référerons souvent au deuxième chapitre car tout l'intérêt de notre méthode consiste à isoler des termes divergents déjà calculés pour la diffusion élastique. Après compensation des termes divergents infrarouges, il subsiste des intégrales sur les paramètres de Feynman. Pour déterminer la méthode la plus précise pour le calcul de ces intégrales multiples, j'ai étudié le comportement de leurs intégrands en fonction de chaque paramètre de Feynman. Nous avons réalisé la première intégration analytiquement et avons dû recourir à une méthode numérique pour les suivantes. Les résultats que j'ai choisis de présenter sont issus du programme que j'ai développé et concernent les différentes cinématiques qui seront réalisées à Jefferson Lab. auprès de l'accélérateur CEBAF.

Chapitre 1

Motivations Physiques

La quête de connaissances sur la structure électromagnétique du nucléon a suscité de nombreuses expériences depuis les années 60. On citera les expériences de diffusion élastique ayant permis de déterminer les facteurs de forme des nucléons ainsi que les diverses expériences de diffusion Compton réelle qui donnent lieu à la mesure des polarisabilités électrique (α) et magnétique (β) du nucléon. La réaction exclusive de diffusion Compton virtuelle, réalisée sous le seuil de production du pion, enrichit cette étude de par les caractéristiques intrinsèques du photon virtuel (3 états de polarisation). Grâce à cette expérience nous allons pouvoir accéder à de nouvelles observables du nucléon baptisées Polarités Généralisées. Ces nouvelles quantités, fonctions uniquement du quadrimoment du photon virtuel échangé, caractérisent la réponse du nucléon à une excitation purement électromagnétique. Dans une première partie, je m'attacherai à présenter les polarisabilités du point de vue de la mécanique classique. Je définirai ensuite les polarisabilités α et β accessibles en photons réels. Une seconde partie sera dédiée au formalisme développé par P.A.M. Guichon *et al.* [1] pour les Polarités Généralisées. En m'appuyant sur ce formalisme, je décrirai la méthode expérimentale qui nous permet d'extraire ces nouvelles observables indépendamment de tout modèle théorique. L'estimation de l'effet des Polarités Généralisées nécessite, par contre, le cadre d'un modèle décrivant le nucléon. Nous verrons que l'effet des Polarités Généralisées, prédit dans différents modèles¹, implique de déterminer la section efficace expérimentale avec une grande précision. Celle-ci devra être de 3% au moins pour espérer ensuite extraire, pour la première fois, des Polarités Généralisées avec une précision raisonnable, meilleure que 30%.

1.1 Concepts des polarisabilités

Littéralement, une polarisabilité représente la faculté qu'a un système à se polariser, c'est-à-dire sa capacité à ajuster sa structure interne sous l'action d'un champ électromagnétique appliqué. Dans le but de clarifier ce que l'on entend par polarisabilité, nous considérerons tout d'abord un cas simple traité en mécanique classique : le modèle de l'atome d'hydrogène de J.J. Thomson²

1. Modèle de quarks non relativistes, Lagrangien effectif et théorie de perturbation chirale.

2. Joseph John Thomson (1856-1940) [Prix Nobel en 1906] : après avoir découvert l'électron en 1900, il envisageait un modèle de l'atome où les électrons étaient plongés dans des courants de charges positives, de telle sorte qu'ils puissent vibrer autour de leur position d'équilibre, avec chacun une fréquence caractéristique et ainsi émettre ou absorber du rayonnement. Ce modèle de l'atome a été réfuté par Rutherford

Considérons donc un électron, de charge $-e$, plongé à l'intérieur d'une sphère isolée de rayon a et dont la charge totale $+e$ est uniformément répartie dans le volume (figure [1.1(I)]). A l'intérieur de cette sphère, constituée d'un matériau isolant, il règne un champ électrique \vec{E}_{local} , radial et centrifuge, dont l'expression nous est donnée par le théorème de Gauss :

$$\vec{E}_{local} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} = -\frac{1}{e} K \vec{r} \quad (1.1)$$

K représente la constante de raideur de notre système par analogie avec un ressort :

$$K = m_e \omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (1.2)$$

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur du modèle de l'électron élastiquement lié et m_e la masse de l'électron.

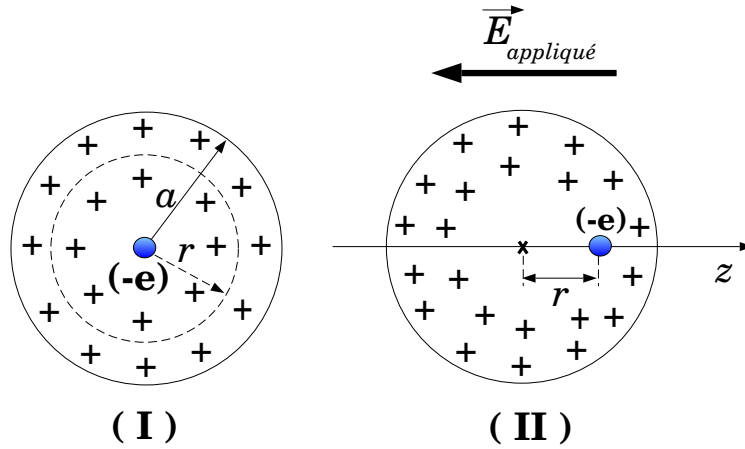


Figure 1.1 - (I) : L'électron reste confiné au centre de la sphère de rayon a sous l'action de la force électrique associée au champ électrique régnant à l'intérieur de la sphère dont la charge totale $+e$ est répartie uniformément dans le volume. (II) : L'ensemble de notre système est soumis au champ électrique, $\vec{E}_{appliqué}$. Les centres des charges $+e$ et $-e$ subissent alors la force résultante du champ appliqué qui les éloignent l'un de l'autre. On est en présence d'un dipôle électrique.

Appliquons maintenant à l'ensemble de notre système un champ électrique extérieur oscillant $\vec{E}_{appliqué}$:

$$\vec{E}_{appliqué} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (1.3)$$

$\vec{E}_{appliqué}$ est parallèle à l'axe z comme représenté sur la figure [1.1(II)]. Sous l'action du champ électrique appliqué, l'électron va être soumis à une force supplémentaire $\vec{F}_{E_{appliqué}}$

colinéaire à l'axe z . Comme les centres de gravité des charges $+e$ et $-e$ ne coïncident plus, on est en présence d'un dipôle électrique (figure [1.1(II)]).

En négligeant les frottements et en supposant que le champ local est très peu modifié ($r \ll a$), l'électron obéit à la loi du mouvement :

$$m_e \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{E_{local}}(\vec{r}) + \vec{F}_{E_{appliqué}}(\vec{r}) \quad (1.4)$$

En résolvant l'équation (1.4), on détermine le déplacement que subit l'électron :

$$\vec{r} = - \frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}_{appliqué} \quad (1.5)$$

Le champ électrique appliqué a induit dans notre système un moment dipolaire électrique oscillant (\vec{d}). On dira que notre système s'est polarisé. Par définition, \vec{d} s'exprime comme le produit de la charge par le déplacement. Dans notre cas, le moment dipolaire $\vec{d}(t)$ s'écrit :

$$\vec{d}(t) = -e\vec{r} = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \alpha \vec{E}_{appliqué} \quad (1.6)$$

Le coefficient de proportionnalité α est appelé **polarisabilité** électrique du système. Elle caractérise la facilité avec laquelle on peut induire un moment dipolaire dans un système donné en appliquant un champ électrique.

A partir de (1.6), on déduit l'expression de α :

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1.7)$$

De manière générale, les polarisabilités d'un système définissent la capacité qu'a ce système à se déformer sous l'action d'un champ électromagnétique appliqué. Les polarisabilités caractérisent l'élasticité d'un système à une perturbation électromagnétique. On peut d'ailleurs exprimer la polarisabilité électrique comme l'inverse de la constante de raideur : $\alpha = \frac{e^2}{K} = 4\pi\epsilon_0 a^3$. Le système d'unité le plus largement utilisé étant le système de Gauss³ ($4\pi\epsilon_0 = 1$), les polarisabilités ont les dimensions d'un volume. On a l'habitude de les exprimer en $fm^3 = (10^{-15})^3 m^3$.

Nous venons de voir (1.6) qu'une polarisabilité est directement reliée au moment dipolaire induit dans le système par le champ appliqué. Nous savons par ailleurs ([4] chap. IX) que le dipôle associé au moment dipolaire est source de rayonnement électromagnétique. A grande distance, la puissance totale rayonnée P par le dipôle s'exprime sous la forme :

$$P = \frac{dP_{in}}{ds} \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \frac{dP_{in}}{ds} \sigma_{Rayleigh} \quad (1.8)$$

avec :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} : \text{rayon classique de l'électron (système d'unité MKSA)}$$

3. La section (A) de l'annexe A récapitule les différents systèmes d'unité employés en électromagnétisme.

$$\frac{dP_{\text{rn}}}{ds} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} : \text{densité superficielle de puissance électromagnétique incidente}$$

La section efficace établie par Lord Rayleigh⁴ qui se factorise dans l'expression de la puissance rayonnée (équation 1.8) est relative à la diffusion de photons sur des atomes ou molécules possédant une fréquence propre de résonance. A partir de (1.7), on constate que cette section efficace est directement proportionnelle à la polarisabilité électrique α . On déduit alors que si nous pouvions mesurer la puissance rayonnée à grande distance, nous serions sensibles à la polarisabilité du système. C'est là tout le principe des expériences de diffusion Compton réelle et virtuelle que nous allons maintenant détailler.

1.2 La diffusion Compton réelle

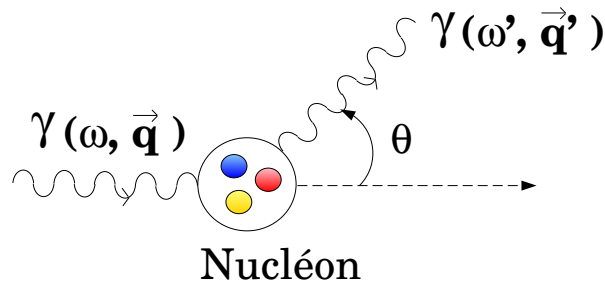


Figure 1.2 - *Diffusion Compton réelle sur un nucléon dans le référentiel du laboratoire.*

La diffusion élastique de photons sur des nucléons a fait suite aux expériences de diffusion de photons sur des électrons atomiques dont la première fut réalisée par A.H. Compton⁵ en 1923. Bien que le processus étudié soit différent, le nom de Compton est aussi associé à la diffusion de photons sur un nucléon. En particulier, la différence entre la diffusion élastique de photons sur des nucléons et l'effet Compton des électrons réside dans le fait que les nucléons non ponctuels possèdent un moment magnétique anormal ainsi que des polarisabilités qui caractérisent leur structure interne.

Dans la diffusion Compton réelle, le photon incident est vu comme un champ électromagnétique (E, H) qui induit un moment électrique ($\langle D \rangle = \alpha E$) et un moment magnétique ($\langle M \rangle = \beta H$) dans le nucléon. Ces moments génèrent un champ électromagnétique : le photon réel diffusé. Sous le seuil de production du pion, l'amplitude de diffusion Compton réelle sur le proton s'exprime sous la forme d'un développement en puissances de l'énergie du photon réel incident. Jusqu'au terme linéaire en ω , Low [6],

4. Lord Rayleigh (1842-1919), ses travaux sur la diffusion de la lumière visible par les molécules sans changement de fréquence (diffusion Rayleigh) lui permirent d'expliquer la couleur bleue du ciel (1871). [Prix Nobel 1904]

5. Arthur Holly Compton (1892-1962) : il est connu en particulier pour ses travaux sur les rayons X, il découvrit en 1923, que l'interaction d'un rayonnement X avec un atome conduit simultanément à une déviation du rayonnement incident et à l'extraction d'un électron de l'atome, phénomène bien connu sous le nom d'effet Compton. Ces travaux ont d'ailleurs apporté une confirmation de l'existence des photons, particules de lumière. [Prix Nobel 1927 avec C. Wilson]

Gell-Mann et Goldberger [7] ont démontré en 1954 que cette amplitude, appelée amplitude de Born, ne dépendait que de la charge, de la masse et du moment magnétique anomal du proton. A l'ordre supérieur (en ω^2), l'amplitude de diffusion [8] [9] s'exprime en fonction de deux paramètres supplémentaires : les polarisabilités électrique et magnétique α et β . Dans le référentiel du laboratoire, la section efficace de diffusion Compton réelle s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{lab}} = \frac{d\sigma^{Born}}{d\Omega_{lab}} - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{e^2}{M}\right) (\omega\omega') \left[\frac{\alpha + \beta}{2} (1 + \cos \theta)^2 + \frac{\alpha - \beta}{2} (1 - \cos \theta)^2 \right] + \mathcal{O}(\omega^2 \omega'^2) \quad (1.9)$$

avec :

M, e : masse au repos et charge du proton,

ω, ω' : énergies des photons incident et diffusé,

θ : angle entre les directions des photons incident et diffusé dans le système du laboratoire,

A partir de l'expression de la section efficace (1.9), on remarque qu'une expérience permet d'extraire les quantités : $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ en jouant sur la valeur de l'angle de détection du photon final.

Après présentation des résultats obtenus expérimentalement pour les polarisabilités α et β , nous les comparerons aux valeurs prédites par différents modèles théoriques décrivant le nucléon.

1.2.1 Expériences de diffusion Compton réelle

Suite aux données pionnières obtenues par Gol'danski *et al.*[10] en 1960, de nombreuses autres expériences de diffusion Compton réelle sur le proton, dédiées à l'extraction des polarisabilités, ont été réalisées. Ces différentes expériences sont discutées dans l'article de MacGibbon *et al.*[11].

Comme le suggère la formule (1.9), les polarisabilités sont déterminées en mesurant la déviation de la section efficace expérimentale par rapport à la section efficace de Born. La très faible déviation attendue théoriquement implique que la section efficace expérimentale soit mesurée avec le plus grand soin pour obtenir des valeurs précises des polarisabilités. Cette exigence de précision se trouverait diminuée si on utilisait des photons de plus haute énergie car la sensibilité de la section efficace aux polarisabilités augmente avec l'énergie. Cependant, si l'énergie du photon incident devient supérieure à la masse du pion, nous sortons du domaine de validité du développement au premier ordre et des ordres supérieurs interviennent, rendant toute extraction des polarisabilités dépendante d'un modèle. Le grand défi de ces expériences réside donc dans la mesure de sections efficaces absolues dans des domaines en énergie et en angle habilement choisis pour être le plus sensible possible aux polarisabilités et le moins sensible possible aux incertitudes théoriques.

Des expériences mesurent $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ suivant le domaine angulaire exploré. De plus, on peut contraindre la section efficace théorique avec la règle de somme établie par Baldin [21] qui, reposant sur des relations de dispersion et sur le théorème optique, ne dépend d'aucun modèle de structure interne. Cette règle de somme :

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2\pi^2} \int_{m_\pi}^{\infty} \frac{\sigma_\gamma(\omega) d\omega}{\omega^2} = (14.2 \pm 0.5) 10^{-4} \text{fm}^3 \quad (1.10)$$

est fonction de la section efficace totale de photoabsorption sur le proton $\sigma_\gamma(\omega)$. La valeur numérique est obtenue à partir des données expérimentales disponibles et de considérations théoriques raisonnables[22] pour extrapoler l'intégrale jusqu'à des énergies infinies.

La compilation des résultats publiés jusqu'alors et correspondant à des énergies faibles de photons incidents donne lieu à la figure (1.3) extraite de la référence [23] et représentant $\alpha - \beta$.

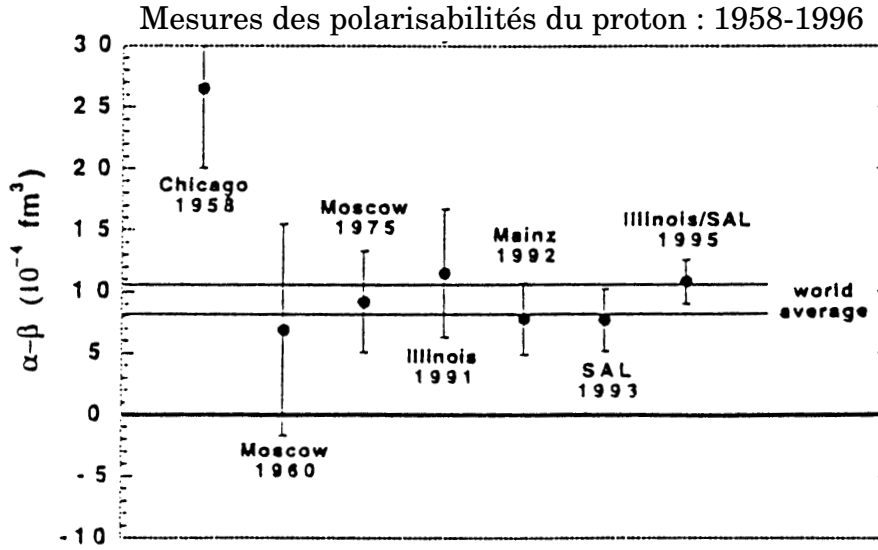


Figure 1.3 - Valeurs expérimentales pour $\alpha - \beta$ obtenues dans les diverses expériences de diffusion Compton réelle sous le seuil de production du pion. Les lignes horizontales correspondent aux limites à $\pm\sigma$ de la moyenne globale. Figure extraite de [23].

En combinant la valeur moyenne des résultats illustrés sur la figure (1.3) à la règle de somme de Baldin, on obtient les résultats suivants pour α et β :

$$\alpha = (12.1 \pm 0.8 \pm 0.5) 10^{-4} \text{fm}^3 \quad (1.11)$$

$$\beta = (2.1 \mp 0.8 \mp 0.5) 10^{-4} \text{fm}^3 \quad (1.12)$$

Le premier terme d'erreur est une combinaison de l'erreur statistique et systématique tandis que le second traduit l'incertitude due au modèle théorique.

D'autres expériences de diffusion Compton réelle sont encore en cours de réalisation et contribueront à affiner ces résultats.

Tels le rayon de charge et les facteurs de forme élastiques, les polarisabilités sont des quantités essentielles pour caractériser la structure interne du nucléon qui, encore aujourd'hui, ne peut être décrite qu'à l'aide de modèles théoriques. En conséquence, l'évaluation des polarisabilités requiert le cadre d'un modèle et nous présenterons ici les prédictions obtenues pour α et β dans quelques modèles.

1.2.2 Prédiction des polarisabilités α et β

Le plus ancien des modèles ayant servi à évaluer les polarisabilités est le Modèle Non Relativiste de Quarks (NRQM). Plus récemment, d'autres modèles, s'appuyant sur la symétrie chirale [17] [16], propriété fondamentale de la Chromo-Dynamique Quantique (QCD), ont vu le jour.

1.2.2.1 Modèle Non Relativiste de Quarks

Le grand succès de ce modèle a été la classification des hadrons. En effet, à partir de trois paramètres ajustés pour reproduire les premiers états excités du nucléon, ce modèle a prédit une large partie du spectre de masse des hadrons que l'expérience a confirmée. Une des limites de ce modèle reste la prédiction du rayon de charge du proton.

Dans ce modèle les trois quarks constituants⁶ du nucléon sont assujettis à un potentiel de confinement et à un potentiel lié à l'interaction de spin entre les quarks. L'hamiltonien du système s'écrit :

$$H = T + H_{confinement} + H_{Hyperfin} \quad (1.13)$$

où T représente l'énergie cinétique du système. Par potentiel de confinement ($H_{confinement}$), on entend principalement le potentiel d'un oscillateur harmonique isotrope à trois dimensions. Le mouvement des quarks à l'intérieur du nucléon est supposé non relativiste. En outre, l'hamiltonien libre associé au nucléon contient un terme supplémentaire dit de structure hyperfine, $H_{Hyperfin}$, tenant compte des couplages spin-spin des quarks.

Evaluation de α :

La polarisabilité électrique est gouvernée par les transitions dipolaires électriques $E1$, $N \rightarrow N^*$, comme illustré sur la figure (1.4). La première résonance que l'on peut atteindre est la D_{13} (1520MeV) pour laquelle un des quarks passe du niveau $1s$ au niveau $1p$. L'application numérique conduit à :

$$\alpha = 5.6 \cdot 10^{-4} fm^3 \quad (1.14)$$

6. Quark constituant : quarks massifs ($m_q \simeq \frac{M_{nucléon}}{3} \simeq 337\text{MeV}$). Ces quarks sont à différencier des quarks légers utilisés dans le modèle des partons en Chromo-Dynamique Quantique.

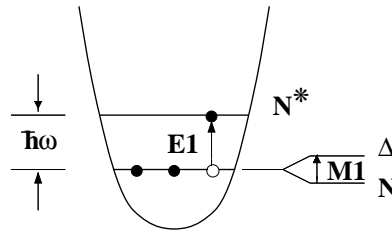


Figure 1.4 - *Transitions dipolaires électriques et magnétiques représentées dans le cadre du modèle de quarks non relativiste.*

Evaluation de β :

La polarisabilité magnétique β est dominée par la transition dipolaire magnétique $M1$, $N \rightarrow \Delta$, représentée sur la figure (1.4). Cette transition magnétique est caractérisée par une inversion de spin d'un des quarks de valence. Numériquement, on obtient :

$$\beta = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ fm}^3 \quad (1.15)$$

Si l'on compare les prédictions données par le modèle de quarks non relativiste pour α et β aux valeurs expérimentales actuelles (cf. tableau 1.1) [23], on s'aperçoit que la polarisabilité électrique est sous-estimée mais que la polarisabilité magnétique est au contraire surévaluée. On pourrait tenter de réajuster le rayon de charge du proton à sa valeur mesurée mais dans ce cas la spectroscopie de masse, grande réussite de ce modèle, ne serait plus reproduite. Les défauts plus importants imputés à ce modèle sont l'omission des corrections relativistes et la non prise en compte de la symétrie chirale.

1.2.2.2 Modèles chiraux

Un des premiers modèles relativistes fut le modèle du “sac du MIT” [13] (MIT Bag) datant de la fin des années 60. Dans ce modèle, les trois quarks du nucléon restent confinés dans une petite cavité, le sac, dans laquelle ils se propagent librement avec une masse nulle. Le confinement est réalisé par une condition à la surface de la cavité qui force les quarks à se réfléchir vers l'intérieur. Dans la version la plus simple, le spin n'est pas renversé par la réflexion ce qui entraîne une violation de la symétrie chirale. Pour la restaurer, il faut introduire un couplage au mode de Goldstone, le pion. Ceci a conduit à développer des modèles hybrides de “sacs”, unifiant les degrés de liberté des quarks et des mésons. Le “sac nuageux” (Cloudy Bag) et le “sac chirale” (Chiral Bag) font partie de ces modèles chiraux de quarks (Chiral Quark Model, CHQM) [14]. Une approche différente est le modèle de solitons chiraux (Chiral Solitons) [15] inspiré par les travaux de Skyrme [18]. Les nouvelles prédictions des polarisabilités obtenues avec ces modèles hybrides font apparaître une forte contribution des pions à la réponse électromagnétique du nucléon. Récemment, des calculs menés par V. Bernard *et al.* [19] et T. Hemmert *et al.* [20] en théorie des perturbations chirales prédisent également α et β . Les valeurs numériques obtenues dans ces différents modèles sont rassemblées dans le tableau (1.1).

1.2.2.3 Récapitulation des diverses prédictions

Le tableau (1.1) récapitule les prédictions de α et β obtenues à partir des différents modèles théoriques cités précédemment.

Modèle	α ($10^{-4} fm^3$)	β ($10^{-4} fm^3$)
NRQM	5.6	3.6
ChQM	10	≤ 2
ChSolitons	10-14	1-2
ChPTh [19]	10.5	3.5
ChPTh [20]	17.1	9.2
Résultats expérimentaux actuels	$12.1 \pm 0.8 \pm 0.5$	$2.1 \mp 0.8 \mp 0.5$

Tableau 1.1 - *Récapitulation des prédictions des polarisabilités électromagnétiques du proton obtenues grâce à différents modèles du nucléon. Ces prédictions sont à comparer aux résultats expérimentaux actuels[23]. Par manque de place, les noms des différents modèles apparaissent sous forme de sigles (NRQM : Modèle de Quarks Non Relativiste; CHQM : Modèle Chiral de Quarks; ChSolitons : modèle de Solitons Chiraux; ChPTh : Théorie de Perturbation Chirale).*

La confrontation prédictions/expérience est loin d'être satisfaisante. La théorie a permis de mettre en évidence l'importante contribution des pions aux polarisabilités électromagnétiques du proton.

Expérimentalement, nous sommes vivement encouragés à prendre de nouvelles données pour améliorer la précision expérimentale et valider ou infirmer les modèles théoriques. En particulier, avec l'avènement d'accélérateurs d'électrons continus de haute intensité, la diffusion Compton virtuelle sur le proton est enfin réalisable. Elle va permettre de déterminer de nouvelles observables électromagnétiques décrivant le proton généralisant les polarisabilités électrique et magnétique obtenues par diffusion Compton réelle. De plus, nous verrons qu'en diffusion Compton virtuelle, dans la limite $Q^2 \rightarrow 0$, il sera possible d'extraire α et β . (Pour plus de détails sur les polarisabilités électromagnétiques des hadrons dans le cadre de la diffusion Compton réelle, on se référera à la revue publiée par Petrun'kin[12].)

1.3 La diffusion Compton virtuelle

La diffusion Compton virtuelle ou "VCS" (Virtual Compton Scattering) se réfère à la réaction $\gamma^* p \rightarrow \gamma p'$ où γ^* désigne le photon virtuel échangé entre le lepton incident et le proton. Du fait de son caractère purement électromagnétique, la diffusion Compton virtuelle a beaucoup de vertus pour explorer la structure du nucléon au même titre que les expériences de diffusion élastique, profondément inélastique et Compton réelle. Une des premières expériences démontrant la faisabilité de la diffusion Compton virtuelle sur le proton est relatée dans l'article de J.F.J. van den Brand *et al.*[24]. A cette époque, le formalisme permettant d'extraire les Polarités Généralisées n'était pas publié et les données expérimentales manquaient de précision. Cette expérience [24] a néanmoins

montré que dans certains domaines cinématiques la diffusion Compton virtuelle dominait et était donc réalisable compte tenu du taux de comptage. Expérimentalement, on accède à la diffusion Compton virtuelle par photo-électroproduction sur le proton, cf. figure (1.5).

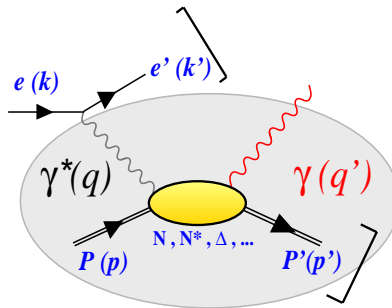


Figure 1.5 - Réaction de photo-électroproduction sur le proton. Le processus de diffusion Compton virtuelle qui nous intéresse est représenté en gris. Dans cette réaction, le photon virtuel γ^* est échangé entre l'électron et le proton. L'état intermédiaire ainsi formé décroît en rayonnant un photon réel. Expérimentalement, on détecte en coïncidence l'électron et le proton diffusé.

En 1995, P.A.M. Guichon *et al.* [1] se sont intéressés au régime de basse énergie, sous le seuil de production du pion, et ont développé un formalisme permettant d'extraire de nouvelles observables électromagnétiques. Ces observables généralisent les polarisabilités obtenues en diffusion Compton réelle. On les appelle Polarisabilités Généralisées $P(q)$.

L'objet de cette partie est de montrer comment sont extraites les Polarités Généralisées à partir d'une section efficace expérimentale. La méthode étant entièrement décrite dans l'article de P.A.M. Guichon *et al.* [1] et la revue [2], nous nous bornerons à en donner les points essentiels. Enfin, avant de clore ce chapitre, nous présenterons les premières estimations des Polarités Généralisées dans le cadre de différents modèles du nucléon. Une première expérience de diffusion Compton virtuelle non polarisée a eu lieu à Mayence (Allemagne) et est en fin d'analyse. Une seconde expérience aura lieu à Jefferson Lab. au printemps 1998. Ma contribution à cette expérience concerne le calcul des corrections radiatives qui sera détaillé dans le chapitre 3.

1.3.1 Introduction

En référence à la revue écrite par P.A.M. Guichon et M. Vanderhaeghen [2], on peut voir la diffusion Compton virtuelle au seuil comme la diffusion élastique d'électrons sur un proton placé dans un champ électromagnétique externe : le photon réel final. Au seuil, l'énergie q' du photon réel final est petite et on peut donc considérer le champ appliqué \vec{A}^{ext} comme statique et constant :

$$\vec{A}^{ext} = \vec{A}_0 e^{iq'x} \simeq \vec{A}_0 \quad (1.16)$$

Sous l'influence du champ extérieur appliqué, la charge J^0 et la densité de courant à l'intérieur du proton sont modifiées. Du fait du faible champ appliqué, cette modification

varie linéairement avec le champ et les coefficients de proportionnalité sont appelés polarisabilités. Dans le cas d'un milieu isotrope uniforme, deux polarisabilités suffisent à décrire le système : les polarisabilités électrique et magnétique (α et β en diffusion Compton réelle). Dans le cas général, le réarrangement de la structure interne du système étudié est décrit par un "tenseur polarisabilité" $P^{\mu\nu}$. Dans l'approximation d'une réponse linéaire, la modification de la densité de courant $\delta J^\mu(x)$ s'écrit :

$$\delta J^\mu(x) = \int d^4y P^{\mu\nu}(x, y) A_\nu^{\text{ext}}(y) \quad (1.17)$$

Pour mesurer $\delta J^\mu(x)$, on procède par diffusion d'électrons de la même manière que l'on mesure les distributions de charge et de courant non perturbées par diffusion élastique. Comme la diffusion élastique permet de mesurer les facteurs de forme, transformées de Fourier des distributions de charge J^0 et de courant $J^\mu(x)$, la diffusion Compton virtuelle permet d'accéder à la transformée de Fourier de $\delta J^\mu(x)$, courant induit par le champ appliqué.

Pour faire le lien avec la diffusion Compton réelle, il faut comprendre que la limite d'un champ appliqué statique est une idéalisation qui n'est pas réalisée en pratique. La fréquence non nulle correspondante de A^{ext} induit une dépendance temporelle non uniforme dans δJ^μ qui rayonne un champ électromagnétique. Ce dernier, du fait de sa dépendance temporelle non uniforme, décroît seulement en $1/r$ et peut donc être détecté à grande distance. C'est le photon réel final de la diffusion Compton réelle. Cette expérience nous donne encore accès à la transformée de Fourier de δJ^μ mais cette fois évaluée le long de la direction du photon réel, c'est-à-dire $q^0 = |\vec{q}| \simeq 0$ par conservation de l'énergie. Ceci diffère du cas de la diffusion Compton virtuelle où q^0 et $|\vec{q}|$ varient indépendamment. En outre, comme le photon final est seulement transverse en diffusion Compton réelle, seule la composante transverse de δJ^μ rentre en jeu. La diffusion Compton virtuelle permettant d'accéder aux composantes transverses et longitudinale de δJ^μ est une généralisation de la diffusion Compton réelle.

Ce qui nous intéresse, c'est la réponse de la structure interne du proton à une excitation électromagnétique. Outre cette réponse interne, la quantité $\delta J^\mu(x)$ à laquelle nous accédons expérimentalement contient une partie triviale et dominante caractérisant la réponse globale (macroscopique) du proton à un champ électromagnétique appliqué : déplacement du proton dû à sa charge et précession de son moment magnétique. Dans le but d'obtenir uniquement la réponse interne, il faut donc soustraire la réponse macroscopique du système. Ceci est l'essence même du théorème de basse énergie [25] qui établit que dans le cas d'un champ appliqué faible, la réponse d'un système non ponctuel est dominée par son mouvement global. Pour caractériser ce dernier, il suffit de connaître la masse, la charge et le moment magnétique du système. Une fois ce mouvement connu, le calcul de l'amplitude de diffusion d'un électron sur ce proton en mouvement ne requiert que l'emploi des facteurs de forme élastiques déjà connus. Pour la diffusion Compton réelle, ce calcul a été effectué par M. Gell-Mann et L. Goldberger [7]. Dans le cas de la diffusion Compton virtuelle, on passe directement au cas quantique où l'emploi de l'invariance de jauge et de la théorie des perturbations simplifie grandement la dérivation.

L'expression générale du courant en présence d'un champ extérieur appliqué est jusqu'à

l'ordre e^2 [2] :

$$J^\mu = e j^\mu + e^2 S^{\mu\nu} A_\nu^{ext} \quad (1.18)$$

Dans le second terme de (1.18), appelé terme de contact ou de “Seagull”, on a posé $A = A^{ext}$ car les contributions des autres composantes du champ sont d'ordre supérieur ou égal à e^3 . Dans cette formulation Hamiltonienne, on note que le tenseur $S^{\mu\nu}$ n'a que des composantes spatiales.

Sous l'effet du champ extérieur, l'évolution des états du nucléon est donnée par la théorie des perturbations. L'Hamiltonien effectif est :

$$H = H_s + V \quad (1.19)$$

avec H_s l'Hamiltonien de l'interaction forte et V la perturbation :

$$V = e \int d\vec{x} j^\mu A_\mu^{ext} + \frac{e^2}{2} S_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \quad (1.20)$$

$$\simeq e \hat{V} \quad (1.21)$$

Jusqu'à l'ordre e^2 , nous ne conservons que le premier terme de (1.20) car le terme de “Seagull” contribue à l'ordre e^3 .

On utilise la représentation de Schrödinger :

$$i \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = (H_s + V) |t\rangle \quad (1.22)$$

où j^μ ne dépend pas du temps.

Dans le cas de photons de basse énergie, le proton ne voit qu'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) constant. Dans ces conditions, la perturbation V est indépendante du temps. En se référant à la revue [2], le courant induit intrinsèque δJ_{int}^μ tient compte de tous les états intermédiaires accessibles entre V et j^μ à l'exception du proton lui-même conduisant à une singularité. Cette singularité est en fait la manifestation quantique du mouvement global. En notant $|n\rangle$ les différents états intermédiaires accessibles d'énergie E_n et $|N_i\rangle$ (resp. N_f) l'état initial d'énergie E_i (resp. final d'énergie E_f), δJ_{int}^μ s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta J_{int}^\mu = & e^2 \langle N_f | S^{\mu\nu}(\vec{r}) A_\nu^{ext}(\vec{r}) | N_i \rangle \\ & + e^2 \sum_{n \neq N} \left(\frac{\langle N_f | \hat{V} | n \rangle \langle n | j^\mu(\vec{r}) | N_i \rangle}{E_f - E_n} + \frac{\langle N_f | j^\mu(\vec{r}) | n \rangle \langle n | \hat{V} | N_i \rangle}{E_i - E_n} \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

A titre d'exemple, étudions successivement l'effet d'un champ électrique puis magnétique constant sur un proton. Pour simplifier, on néglige ici le recul du proton : $E_i = E_f = m$. Ceci est d'ailleurs justifié à petit transfert ($Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$).

Effet d'un champ électrique constant :

Le potentiel de jauge correspondant à un champ électrique constant est tel que :

$$A_{ext}^0 = -\vec{r} \cdot \vec{E} \quad \vec{A}_{ext} = \vec{0} \quad (1.24)$$

En utilisant l'équation (1.23) et en se rappelant que le terme de contact $S^{\mu\nu}$ n'a pas de composantes temporelles, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta J_{int,E}^\mu(\vec{r}) &= e^2 \sum_{n \neq N} \frac{\langle N_f | \int d\vec{r} j^0(\vec{r}) (-\vec{r} \cdot \vec{E}) | n \rangle \langle n | j^\mu(\vec{r}) | N_i \rangle}{m - E_n} + c.c. \\ &= e^2 \sum_{n \neq N} \frac{\langle N_f | \vec{d} \cdot \vec{E} | n \rangle \langle n | j^\mu(\vec{r}) | N_i \rangle}{E_n - m} + c.c. \end{aligned} \quad (1.25)$$

avec \vec{d} l'opérateur moment dipolaire électrique : $\vec{d} = \int d\vec{r} \vec{r} j^0(\vec{r})$. (*c.c.* : complexe conjugué.)

Si nous réussissons à soustraire le mouvement global du nucléon, une expérience de diffusion Compton virtuelle réalisée au seuil nous permet de mesurer les courants induits par le champ électrique appliqué \vec{E} . A partir de l'équation (1.25), on déduit le moment dipolaire électrique induit :

$$\delta \vec{d} = \int d\vec{r} \vec{r} \delta J_{int,E}^0 = \alpha \vec{E} \quad (1.26)$$

En moyennant sur les états de spin du nucléon et en sommant sur ceux des états intermédiaires accessibles, la polarisabilité électrique α s'écrit :

$$\alpha = \frac{e^2}{3} \sum_{n \neq N, \sigma, \sigma'} \frac{|\langle N, \sigma | \vec{d} | n, \sigma' \rangle|^2}{E_n - m} > 0 \quad (1.27)$$

Effet d'un champ magnétique constant :

Le champ de jauge correspondant à un champ magnétique constant est tel que :

$$A_{ext}^0 = 0 \quad \vec{A}_{ext} = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B} \quad (1.28)$$

En remplaçant V par sa nouvelle expression dans l'équation (1.23), nous écrivons :

$$\begin{aligned} \delta J_{int,B}^\mu(\vec{r}) &= \frac{e^2}{2} \langle N_f | S^{\mu m}(\vec{r}) \varepsilon_{mjk} r^j | N_i \rangle B^k \\ &+ e^2 \sum_{n \neq N} \frac{\langle N_f | \int d\vec{r} \vec{j}(\vec{r}) (-\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}) | n \rangle \langle n | j^\mu(\vec{r}) | N_i \rangle}{m - E_n} + c.c. \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^2}{2} \langle N_f | S^{\mu m}(\vec{r}) \varepsilon_{mjk} r^j | N_i \rangle B^k \\ &+ e^2 \sum_{n \neq N} \frac{\langle N_f | \vec{\mu} \cdot \vec{B} | n \rangle \langle n | j^\mu(\vec{r}) | N_i \rangle}{E_n - m} + c.c. \end{aligned} \quad (1.30)$$

avec $\vec{\mu}$ l'opérateur moment dipolaire magnétique : $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) = \beta \vec{B}$.

Le moment dipolaire magnétique induit $\delta\vec{\mu}$ par le champ magnétique appliqué \vec{B} est :

$$\delta\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \vec{r} \times \vec{J} = \underbrace{(\beta_{dia} + \beta_{para})}_{\beta} \vec{B} \quad (1.31)$$

A partir des équations (1.30) et (1.31), on déduit les composantes paramagnétique et diamagnétique de la polarisabilité β en moyennant sur les états de spin du nucléon et en sommant sur ceux des états intermédiaires accessibles. Nous obtenons :

$$\beta_{dia} = -\frac{e^2}{6} \sum_{\sigma} \langle N, \sigma | \int d\vec{r} r^2 j^0(\vec{r}) | N, \sigma \rangle \quad (\leq 0) \quad (1.32)$$

$$\beta_{para} = \frac{e^2}{3} \sum_{n \neq N, \sigma, \sigma'} \frac{|\langle N, \sigma | \vec{\mu} | n, \sigma' \rangle|^2}{E_n - m} \quad (\geq 0) \quad (1.33)$$

La formule (1.32) suppose que le terme de contact est pris tel que dans la théorie des champ scalaire, c'est-à-dire : $S^{\mu m} = -2 \delta(\mu, m) j^0(\vec{r})$. On signale que les polarisabilités α et β sont ici exprimées dans le système d'unité Heaviside-Lorentz. On note d'ailleurs que toute la dérivation des Polarisabilités Généralisées utilise ce système d'unité.

1.3.2 Section efficace et amplitude de la réaction de photo-électroproduction

Dans le cadre de cette réaction de photo-électroproduction, le photon réel final peut aussi bien être émis par l'électron ou le proton sans distinction possible pour l'expérimentateur. Ainsi, dans l'approximation d'un seul photon virtuel échangé, on est amené à considérer les graphes représentés sur la figure (1.6).

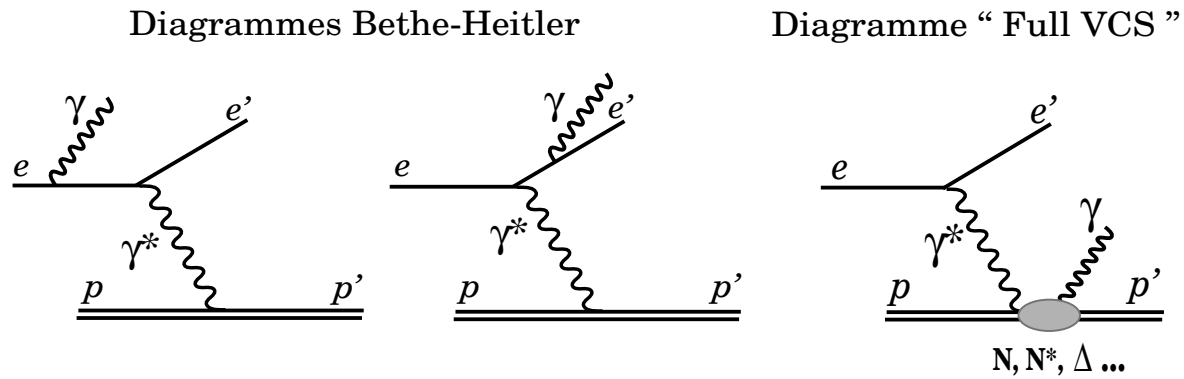


Figure 1.6 - *Expérimentalement, on ne peut dissocier ces 3 graphes. Les deux premiers sont décrits par l'amplitude Bethe-Heitler tandis que le dernier, représentant le processus qui nous intéresse, sera décrit par l'amplitude FVCS (Full Virtual Compton Scattering).*

Les deux premiers graphes sont décrits par l'amplitude Bethe-Heitler (BH) qui est entièrement calculable par l'Electro-Dynamique Quantique (QED). Le dernier graphe sera

décrit par l'amplitude Full Virtual Compton Scattering (FVCS) qui, dans l'approximation d'un seul photon virtuel échangé, est une combinaison linéaire des amplitudes VCS. On reviendra sur cette amplitude FVCS ultérieurement, cf. équation (1.48).

Tout ce qui va suivre s'appliquera à l'expérience de diffusion Compton virtuelle non polarisée réalisée sous le seuil de production du pion. On s'intéresse donc au domaine de basse énergie où l'énergie totale disponible dans le centre de masse (photon-proton), \sqrt{s} , est telle que : $M < \sqrt{s} < M + m_\pi$ (M et m_π , masse au repos du proton et du pion). Expérimentalement, l'électron et le proton diffusés sont détectés en coïncidence dans deux spectromètres de haute résolution. Les bons événements sont identifiés par une impulsion manquante non nulle et une masse manquante nulle correspondant au photon réel émis.

En premier lieu, nous devons définir les variables pertinentes de la diffusion Compton virtuelle et préciser les notations employées dans la suite.

1.3.2.1 Variables cinématiques

Les particules mises en jeu dans la réaction de photo-électroproduction sur le proton $e p \rightarrow e' p' \gamma$ sont : l'électron incident (e_i), l'électron diffusé (e_d), le photon virtuel (γ^*), le proton cible (p_i), le proton diffusé (p_d) et le photon réel (γ). Les notations des variables associées à chacune des particules correspondant au troisième graphe de la figure [1.6] sont rassemblées dans le tableau 1.2.

	e_i	e_d	γ^*	p_i	p_d	γ
Quadri-vecteur energie-impulsion	k	k'	$q = k - k'$	p	p'	q'
Masse au repos carrée	m_e^2	m_e^2	$q^2 < 0$	M^2	M^2	0
Energie	k^0	k'^0	$q^0 = k^0 - k'^0$	p^0	p'^0	q'^0
Vecteur impulsion	\vec{k}	\vec{k}'	$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$	\vec{p}	\vec{p}'	\vec{q}'
Module de l'impulsion	k	k'	$q = \vec{k} - \vec{k}' $	p	p'	q'
Hélicité et projection de spin	h	h'	λ	σ	σ'	λ'

Tableau 1.2 - *Ce tableau récapitule les notations des variables associées aux particules mises en jeu dans la réaction $e p \rightarrow e' p' \gamma$. On souligne que les variables relatives au photon virtuel correspondent au troisième graphe de la figure [1.6]. Dans la suite, on utilisera souvent q et q' , les modules des impulsions relatifs respectivement au photon virtuel et au photon réel.*

Les états de spin des électrons et photons sont décrits par leur hélicité. Par tradition, on assigne au proton la projection de son spin sur un axe arbitraire, soit ici la direction du photon virtuel. Nous négligerons dans la suite la masse au repos de l'électron devant son impulsion. Dans cette approximation, l'hélicité est conservée au vertex leptonique, $h = h'$, ce qui simplifie notablement les calculs. Le formalisme [2] ne s'applique pas aux cinématiques où la seule échelle de masse subsistant est celle de l'électron. On rencontre ces cinématiques lorsque l'angle entre les électrons ou l'angle entre le photon réel et l'électron incident est de l'ordre de m_e/k .

Etant donné que nous nous intéressons à la réaction de diffusion Compton virtuelle sous le seuil de production du π^0 , nous adoptons le référentiel du Centre de Masse (CM) photon-proton (défini par $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$) car l'énergie du photon réel sortant, q' , restera toujours petite (idée de base du développement en q'). Seules les variables définies dans le système du laboratoire seront indicées *lab*. Les quantités invariantes fréquemment utilisées et se rapportant au troisième graphe de la figure [1.6] sont :

$$Q^2 = -q^2 \quad (1.34)$$

$$s = (q + p)^2 = (p' + q')^2 \quad (1.35)$$

$$t = (q - q')^2 = (p' - p)^2 \quad (1.36)$$

Les paramètres de l'amplitude VCS, q et q' , sont directement reliés à (Q^2, s) au seuil.

Nous donnons ici la définition de deux autres variables cinématiques qui paramétrisent également l'amplitude VCS :

- ϵ : taux de polarisation linéaire du photon virtuel. Dans la limite $m_e \rightarrow 0$,

$$\epsilon = \left(1 + 2 \frac{\vec{q}_{lab}^2}{Q^2} \tan^2(\theta_{lab}^{ee'}/2) \right)^{-1} = \frac{(k - k')^2 - q^2}{(k + k')^2 + q^2} \quad (1.37)$$

- φ : angle azimuthal entre les plans leptonique et hadronique.

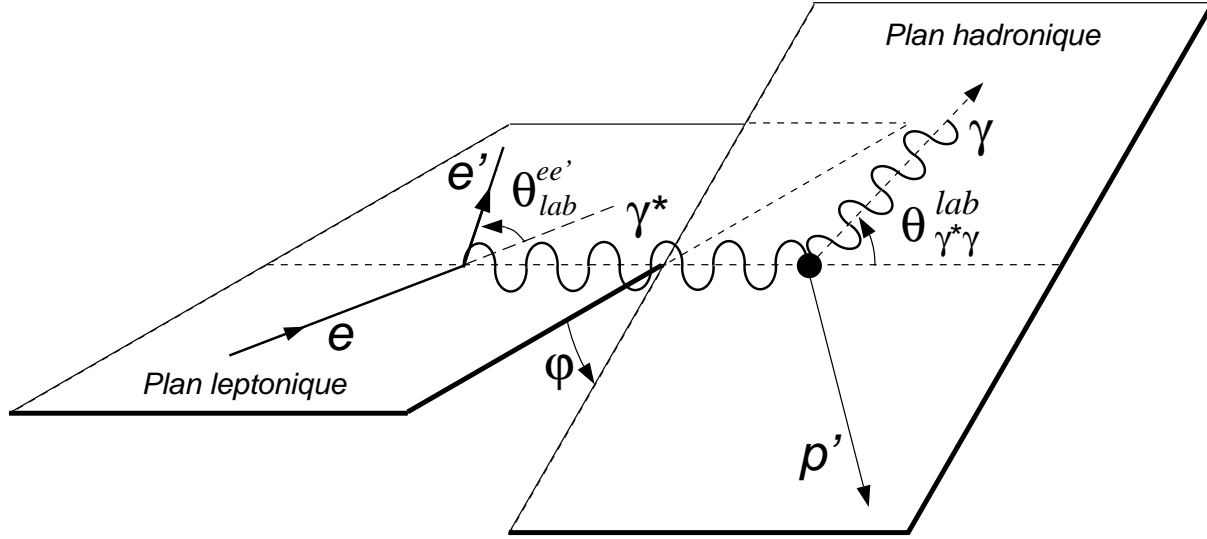


Figure 1.7 - *Cinématique du VCS. Sur cette figure, φ , $\theta_{lab}^{ee'}$ et $\theta_{\gamma^* \gamma}^{lab}$ sont positifs.*

On note que ϵ et φ , bien que n'étant pas des invariants relativistes, sont identiques dans le système du laboratoire et dans le système du centre de masse. Pour ϵ , ceci se déduit de sa définition, cf. troisième membre de l'équation (1.37) quant à φ , il ne varie pas entre le système du laboratoire et le système du centre de masse choisi ici : $\gamma^* p \rightarrow \gamma p$.

Après toutes ces définitions, nous sommes à même d'étudier les aspects théoriques de la diffusion Compton virtuelle en termes de section efficace et d'amplitudes de diffusion FVCS et VCS.

Dans le système du laboratoire, la section efficace non polarisée de photo-électroproduction correspondant aux graphes de la figure (1.6) s'exprime sous la forme :

$$\frac{d^5\sigma}{dk'_{lab} [d\Omega_e]_{lab} [d\Omega_p]_{CM}} = \frac{(2\pi)^{-5}}{64M} \left(\frac{k'_{lab}}{k_{lab}} \right) \frac{s - M^2}{s} \mathcal{M} \quad (1.38)$$

où \mathcal{M} , invariant sous la transformation de Lorentz, peut être évalué dans le centre de masse. \mathcal{M} est fonction des amplitudes de diffusion Bethe-Heitler (BH) et Full VCS (FVCS) :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4} \sum_{\sigma\sigma'h'\lambda'} |\underbrace{T^{BH} + T^{FVCS}}_{T^{ee'\gamma}}|^2 \quad (1.39)$$

avec $T^{ee'\gamma}$, l'amplitude totale correspondant à la réaction de photo-électroproduction réalisée expérimentalement.

Dans l'approximation d'un seul photon virtuel échangé et dans la jauge de Lorentz, nous écrivons les amplitudes Bethe-Heitler et FVCS :

$$T^{BH} = \frac{-e^3}{t} \epsilon'^*_{\mu} L^{\mu\nu} \bar{u}(p') \Gamma_{\nu}(p', p) u(p) \quad (1.40)$$

$$T^{FVCS} = \frac{e^3}{q^2} \epsilon'^*_{\mu} H^{\mu\nu} \bar{u}(k') \gamma_{\nu} u(k) \quad (1.41)$$

- $\epsilon'^*_{\mu}(q', \lambda')$ est le vecteur de polarisation du photon réel sortant et $e \simeq \sqrt{4\pi/137}$ est la charge du proton dans le système Heaviside-Lorentz.
- Pour des raisons de simplification des calculs au niveau du développement de basse énergie de l'amplitude de diffusion Compton virtuelle, il est préférable d'utiliser la décomposition de Dirac pour le vertex hadronique Γ_{ν} qui s'écrira en fonction des facteurs de forme F_1 et F_2 .
- $L^{\mu\nu}$ est le tenseur leptonique dérivé de la théorie de perturbation de QED. Il vérifie l'invariance de jauge : $q'_{\mu} L^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} (q_{\nu} - q'_{\nu}) = 0$. Dans le processus Bethe-Heitler, le moment du photon virtuel échangé est $(q - q' = p' - p)$. En se référant à la figure [1.6], on a :

$$L^{\mu\nu} = \bar{u}(k') \left(\gamma^{\mu} \frac{1}{\gamma \cdot (k' + q') - m_e + i\varepsilon} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \frac{1}{\gamma \cdot (k - q) - m_e + i\varepsilon} \gamma^{\mu} \right) u(k) \quad (1.42)$$

- Dans l'expression T^{FVCS} , $H^{\mu\nu}$ est le tenseur hadronique sur lequel va porter notre

étude. $H^{\mu\nu}$ doit satisfaire à l'invariance de jauge, $q'_\mu H^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} q_\nu = 0$.

$$H^{\mu\nu} = \int d\vec{x} e^{-i\vec{q}' \cdot \vec{x}} \left(\langle \vec{p}' | j^\mu(\vec{x}, 0) \frac{1}{p^{0'} + q' - H_s + i\varepsilon} j^\nu(0) \right. \\ \left. + j^\nu(0) \frac{1}{p^0 - q' - H_s + i\varepsilon} j^\mu(\vec{x}, 0) | \vec{p} \rangle + H_{Seagull}^{\mu\nu} \right) \quad (1.43)$$

$$H_{Seagull}^{\mu\nu} = \langle \vec{p}' | S^{\mu\nu}(0) | \vec{p} \rangle \quad (1.44)$$

En décomposant le courant leptonique ($\bar{u} \gamma_\nu u$) sur la base des vecteurs de polarisation du photon virtuel $\epsilon(q, \lambda)$ et en utilisant les expressions des spineurs d'hélicité, on obtient [1] :

$$\bar{u}(k', h) \gamma_\nu u(k, h) = \sum_{\lambda=0, \pm 1} \Omega(h, \lambda) \epsilon_\nu(q, \lambda) \quad (1.45)$$

avec

$$\Omega(h, \lambda) = \left(-\lambda e^{-i\lambda\phi} \alpha(\lambda h) + \delta(\lambda, 0) \frac{q^0}{Q} \sqrt{2\epsilon} \right) \quad (1.46)$$

$$\alpha(z) = \frac{\sqrt{1+\epsilon} + 2z\sqrt{1-\epsilon}}{\sqrt{2}}$$

L'amplitude VCS est définie par [1] :

$$T^{VCS}(\lambda', \lambda) = \epsilon'^*_\mu(\lambda') H^{\mu\nu} \epsilon_\nu(\lambda) \quad (1.47)$$

Ce qui permet maintenant d'écrire l'amplitude FVCS sous la forme :

$$T^{FVCS} = \frac{e^3}{-Q^2} \sum_\lambda \Omega(h, \lambda) T^{VCS}(\lambda', \lambda) \quad (1.48)$$

A $Q^2 = 0$, la partie transverse de T^{VCS} , correspondant à $\lambda = \pm 1$ est l'amplitude de diffusion Compton réelle. Dans ce cas, $Q^2 \rightarrow 0$. Au regard de (1.48) et (1.47), on constate qu'on ne peut prendre cette limite que dans le cas de T^{VCS} et non de T^{FVCS} .

En combinant les degrés de liberté des photons réel ($\lambda' = \pm 1$) et virtuel ($\lambda = 0, \pm 1$) au spin du nucléon et en tenant compte de la conservation de la parité, on peut décrire l'amplitude VCS à partir de 12 amplitudes indépendantes pour $(q, q', \theta_{\gamma^*\gamma})$ fixés :

$$\begin{array}{ccccc} & \gamma^* & p & \rightarrow & \gamma & p \\ \text{Degrés de liberté} & 3 & 2 & & 2 & 2 & = 24 \end{array}$$

Les 12 coefficients qui paramétrisent ces amplitudes sont à priori des fonctions inconnues de $(q, q', \theta_{\gamma^*\gamma})$.

Sous le seuil de production du pion, le seul état intermédiaire sur couche de masse possible est celui correspondant au nucléon. Les états intermédiaires sur couche de plus haute énergie ne contribueront que lorsque $\sqrt{s} \geq M + m_\pi$. Sous le seuil, on est donc assuré

que les dénominateurs des propagateurs de (1.43), associés aux états intermédiaires de haute énergie, ne s'annulent pas dans la limite $q' = 0$.

En décomposant habilement $H^{\mu\nu}$, il est possible de développer l'amplitude VCS en puissances de q' . Nous serons alors en mesure d'appliquer le deuxième théorème de Low[25] qui établit que les deux premiers termes du développement de l'amplitude sont complètement déterminés par la connaissance des facteurs de forme élastiques. D'autre part, nous montrerons comment le terme suivant du développement est paramétrisable par 6 fonctions réelles de q , les Polarisabilités Généralisées notées $P(q)$.

1.3.2.2 Développement de l'amplitude VCS en puissances de q'

Dans cette partie, nous allons rappeler la décomposition de $H^{\mu\nu}$ afin qu'il puisse s'exprimer sous la forme d'un développement en puissances de q' . Pour $q' \rightarrow 0$ et q fixé, nous savons grâce au second théorème de Low[25] que les coefficients du développement d'ordre q'^{-1} et q'^0 seront entièrement définis à partir des facteurs de forme élastiques du proton. Cette partie est complètement détaillée dans l'article de P.A.M. Guichon *et al.* [1] qui ont développé le formalisme.

$H^{\mu\nu}$ se décompose sous la forme :

$$\boxed{H = H_{Born} + H_{Non-Born}} \quad (1.49)$$

où :

- H_{Born} contient les contributions du nucléon et de l'anti-nucléon sur couche de masse. Ce terme est invariant de jauge lorsqu'on l'exprime en fonction des facteurs de forme F_1 et F_2 (Pauli-Dirac).
- $H_{Non-Born}$ contient la contribution des états intermédiaires N^* , Δ ...

Remarques sur le terme $H_{Non-Born}$:

Il est montré [25] [1] que le développement de $H_{Non-Born}$ en puissances de q' commence à l'ordre q' :

$$H_{Non-Born} = a_1 q' + \mathcal{O}(q'^2) \quad (1.50)$$

avec a_1 indépendant de q' .

On représente le terme $H_{Non-Born}$ par le troisième graphe de la figure (1.8).

Remarques sur le terme H_{Born} :

Le terme de Born correspond aux deux premiers graphes de la figure (1.8). En consultant la définition de H_{Born} dans [1], on constate que ce terme est divergent dans la limite $q' = 0$ car dans ce cas les propagateurs s'annulent. Le développement de H_{Born} en puissances de q' commence donc à l'ordre q'^{-1} . On exprimera H_{Born} sous la forme :

$$H_{Born} = b_{-1} q'^{-1} + b_0 + b_1 q' + \mathcal{O}(q'^2) \quad (1.51)$$

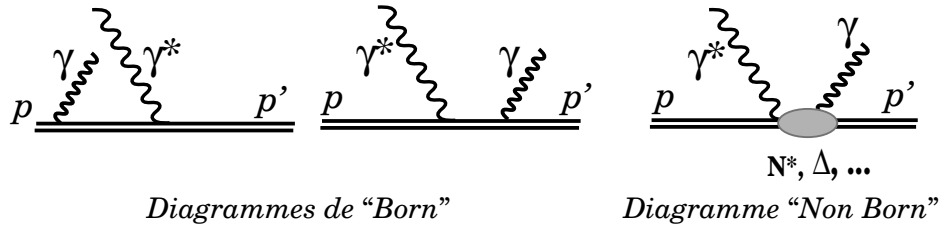


Figure 1.8 - Diagrammes contribuant à l'amplitude VCS.

Nous savons grâce au théorème de Low [25], que, à q fixé, les coefficients b_{-1} et b_0 sont entièrement déterminés par les facteurs de forme élastiques électrique et magnétique du proton, F_1 et F_2 . Le terme d'ordre supérieur en q' , b_1 , non dépendant de la structure interne du proton, est lui aussi entièrement calculable à partir des variables cinématiques de la réaction, q , ϵ , $\theta_{\gamma^*\gamma}$, φ et des facteurs de forme élastiques.

Expression de l'amplitude FVCS :

A partir des développements précédents, l'amplitude FVCS, définie dans (1.40), peut finalement se mettre sous la forme :

$$T^{FVCS} = \frac{-e^3}{-Q^2} \sum_{\lambda} \Omega(h, \lambda) T^{VCS}(\lambda', \lambda) \quad (1.52)$$

$$= \frac{-e^3}{-Q^2} \sum_{\lambda} \Omega(h, \lambda) \epsilon_{\mu}'^*(\lambda') \underbrace{[b_{-1} q'^{-1} + b_0 + (b_1 + a_1) q' + \mathcal{O}(q'^2)]}_{H^{\mu\nu}} \epsilon_{\nu}(\lambda) \quad (1.53)$$

1.3.2.3 Amplitude totale de photo-électroproduction

Comme l'amplitude de Born (H_{Born}), décrite précédemment, l'amplitude Bethe-Heitler diverge pour $q' \rightarrow 0$. Dans les deux cas, cette divergence en $\frac{1}{q'}$, associée à l'émission de photons de très basse énergie est connue sous le nom de divergence infrarouge et nous la retrouverons dans les chapitres traitant des corrections radiatives. En considérant le tenseur leptonique $L^{\mu\nu}$ dans (1.42), on vérifie facilement que l'amplitude Bethe-Heitler se développe en puissances de q' sous la forme :

$$T^{BH} = c_{-1} q'^{-1} + c_0 + c_1 q' + \mathcal{O}(q'^2) \quad (1.54)$$

On a maintenant tous les éléments pour pouvoir exprimer l'amplitude de photo-électroproduction en un développement en puissances⁷ de q' :

$$\begin{aligned}
T^{e e' \gamma} &= T^{BH} + T^{FVCS} \\
&= (b_1 + c_1) q'^{-1} + (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1 + a_1) q' + \mathcal{O}(q'^2) \\
&= \alpha_{-1} q'^{-1} + \alpha_0 + \underbrace{\alpha_1}_{(b_1+c_1)} q' + a_1 q' + \mathcal{O}(q'^2)
\end{aligned} \quad (1.55)$$

7. Pour simplifier, on supprime tous les éléments et indices liés à la polarisation des photons.

Dans le développement final (1.55) de l'amplitude de photo-électroproduction, $T^{\epsilon\epsilon'\gamma}$, les coefficients α_{-1} , α_0 et α_1 sont entièrement calculables à partir des variables cinématiques (q , ϵ , $\theta_{\gamma^*\gamma}$, φ), de l'électro-dynamique quantique et des facteurs de forme élastiques du proton. Par conséquent, seul le coefficient a_1 , issu de l'amplitude "Non-Born", reste encore indéterminé dans l'expression (1.55). Ce coefficient est lié à la structure interne du nucléon. Pour préciser cette inconnue, P.A.M. Guichon *et al.* ont développé le premier terme de $H_{Non-Born}^{\mu\nu}$, linéaire en q' , sur 10 multipôles. Ces multipôles sont paramétrisables par 6 fonctions réelles de q appelées Polarisabilités Généralisées (travaux de P.A.M. Guichon *et al.* [1] et D. Drechsel *et al.* [34] [35]). On note que pour $q' = 0$, il existe une bijection⁸ entre q et Q^2 . Ainsi, les Polarisabilités Généralisées sont, comme les facteurs de forme, des fonctions de q (et de Q^2 pour $q' = 0$, cf. note de bas de page).

1.3.3 Polarisabilités Généralisées

Nous serons en mesure de dénombrer les 10 multipôles grâce aux règles de sélection issues de la conservation de la parité et du moment angulaire total. Ces multipôles sont paramétrisés par seulement 6 Polarisabilités Généralisées grâce au récent travail de D. Drechsel *et al.* [34] [35]. Nous montrerons comment extraire pratiquement ces six polarisabilités des sections efficaces expérimentales obtenues par la réaction de photo-électroproduction non polarisée et polarisée. Pour terminer, nous présenterons des prédictions de ces Polarisabilités Généralisées obtenues à l'aide du modèle de quarks non relativiste, du modèle de Lagrangien effectif développé par M. Vanderhaeghen *et al.* [27] et dans le cadre de la théorie de perturbation chirale [32] [33].

1.3.3.1 Décomposition de $H_{Non-Born}^{\mu\nu}$ en multipôles

Cette décomposition en multipôles nous permet d'isoler les dépendances angulaires et de spin dans des fonctions connues. Les multipôles résultant de cette décomposition sont dits réduits. On les différencie par les diverses combinaisons possibles des caractéristiques des photons (spin et moment angulaire) et selon qu'il y a inversion ($S = 1$) du spin du proton ou non ($S = 0$) lors de la transition.

Les relations de conservation de la parité et du moment angulaire total nous permettent d'énoncer les règles de sélection qui régissent les multipôles réduits :

$$\begin{aligned} (-1)^{\rho'+L'} &= (-1)^{\rho+L} \quad (\rho', \rho = 0, 1, 2) \\ |L' - S| &\leq L \leq |L' + S| \quad \text{avec } S = 0, 1 \end{aligned} \quad (1.59)$$

8. De manière générale, on a :

$$Q^2 = f(q, q') = -(s + M^2) + 2\sqrt{s} \sqrt{M^2 + q^2} \quad (1.56)$$

avec

$$s = M^2 + 2q'^2 + 2q'\sqrt{q'^2 + M^2} \quad (1.57)$$

Pour $q' = 0$, $s = M^2$ et Q^2 devient :

$$Q^2 = -2M^2 + 2M\sqrt{q + M^2} \quad (1.58)$$

A partir de ces deux relations, on peut dès à présent déduire les valeurs possibles pour L :

$$\begin{aligned} L &= L' & S &= 0, 1 \\ L &= L' - 1 & S &= 1 \\ L &= L' + 1 & S &= 1 \end{aligned} \quad (1.60)$$

L, L' : moment angulaire total de γ^* , γ respectivement. Ces valeurs, auxquelles sont adjointes toutes les combinaisons possibles de ρ et ρ' , nous servent à dénombrer les multipôles. On rappelle que :

$$\begin{aligned} \rho &= 0 & \text{transition coulombienne (notée L pour longitudinal)} \\ \rho &= 1 & \text{transition magnétique (notée M pour magnétique)} \\ \rho &= 2 & \text{transition électrique (notée E pour électrique-transverse)} \\ S &= 0 & \text{transition scalaire (non "spin flip")} \\ S &= 1 & \text{transition vectorielle ("spin flip")} \end{aligned} \quad (1.61)$$

Le but du développement de $H_{Non-Born}$ en multipôles est de déterminer le coefficient a_1 correspondant au terme linéaire en q' dans l'équation (1.55). Nous nous limiterons donc aux multipôles linéaires en q' ($L' = 1$). Dans le tableau (1.3) sont rassemblées toutes les valeurs permises (cf. règles de sélection 1.59) des différents nombres quantiques caractérisant les multipôles. Grâce à ces nombres quantiques, on peut de plus qualifier les différentes transitions mises en jeu.

Photon initial γ^*		Photon final γ		Inversion de spin	Transitions
ρ	L	ρ'	L'	S	$\gamma \otimes \gamma^*$
0	0	1	1	1	M1 * L0
0	2	1	1	1	M1 * L2
1	1	1	1	0,1	M1 * M1
2	2	1	1	1	M1 * E2
0	1	2	1	0,1	E1 * L1
1	2	2	1	1	E1 * M2
2	1	2	1	0,1	E1 * E1

Tableau 1.3 - *Ce tableau récapitule les valeurs autorisées des nombres quantiques pour les multipôles linéaires en q' . On rappelle que S se réfère à l'inversion ($S = 1$) ou non ($S = 0$) du spin du proton lors de la transition. On note les transitions $\rho' L' * \rho L$. Les transitions M1 * M1 ($S = 0, 1$) sont reliées respectivement à β^0 et β^1 tandis que les transitions E1 * E1 ($S = 0, 1$) sont reliées à α^0 et α^1 .*

Il y a ainsi 10 multipôles notés $H_{NB}^{(\rho' L', \rho L) S}$:

$$H_{NB}^{(11,00)1}, H_{NB}^{(11,02)1}, H_{NB}^{(11,11)0}, H_{NB}^{(11,11)1}, H_{NB}^{(11,22)1} \quad (1.62)$$

$$H_{NB}^{(21,01)0}, H_{NB}^{(21,01)1}, H_{NB}^{(21,12)1}, H_{NB}^{(21,21)0}, H_{NB}^{(21,21)1} \quad (1.63)$$

On pourrait alors définir 10 polarisabilités qui correspondraient à la limite des multipôles à $q' = 0$:

$$\lim_{q' \rightarrow 0} \frac{1}{q'} \frac{1}{q^L} H_{NB}^{(\rho' L'=1, \rho L)}(q, q') \quad (1.64)$$

Néanmoins, la situation est plus compliquée : Il est nécessaire de retrouver les valeurs de α et β mesurées en diffusion Compton réelle quand $q \rightarrow 0$. Ceci n'est pas complètement évident car :

- en photons réels $q' \rightarrow 0$ avec $\frac{q}{q'} = 1$,
- en photons virtuels, q' tend vers 0, puis q tend vers 0 [1.9-b].

Pour mieux illustrer ce problème, on a représenté sur les figures [1.9-a] et [1.9-b], les chemins suivis en Compton réel et virtuel pour rejoindre la limite $(q', q) \rightarrow 0$:

1. \overrightarrow{AB} : à q fini fixé, $q' \rightarrow 0$,
2. \overrightarrow{BC} : à $q' = 0$, $q \rightarrow 0$. On a alors :

$$\tilde{q}^0|_{(q'=0)} = -\frac{Q^2}{2M} = M - \sqrt{M^2 + q^2} \quad (1.65)$$

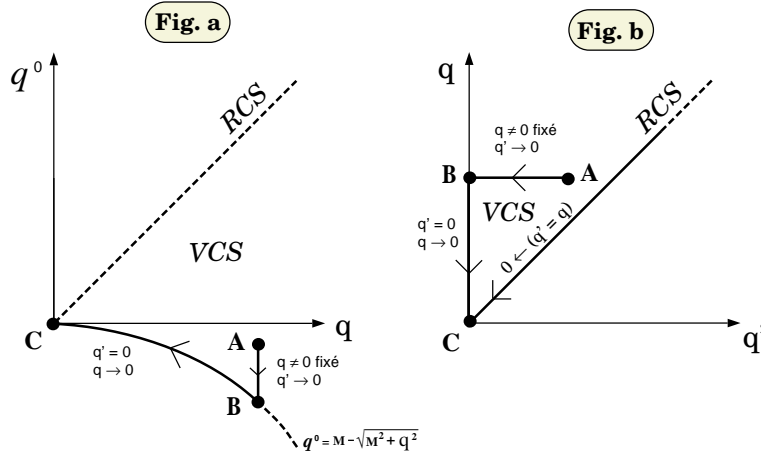


Figure 1.9 - Comportements de la diffusion Compton virtuelle (VCS) et de la diffusion Compton réelle (RCS) lorsque l'on veut atteindre $(q, q') \rightarrow 0$. Fig. a : dans le plan (impulsion, énergie) du photon virtuel, Fig. b : dans le plan (q', q) .

Le problème a été résolu par D. Drechsel *et al.* [34] [35]. Ils ont montré qu'il n'existe que 6 polarisabilités indépendantes qui sont :

$$2 \text{ polarisabilités scalaires} : P^{(01,01)0}(q) \quad P^{(11,11)0}(q) \quad (1.66)$$

$$4 \text{ polarisabilités vectorielles} : P^{(01,01)1}(q) \quad P^{(11,11)1}(q) \quad (1.67)$$

$$P^{(11,02)1}(q) \quad P^{(01,12)1}(q) \quad (1.68)$$

et dont la limite $q \rightarrow 0$ redonne bien la même limite qu'en photons réels. D. Drechsel *et al.* [34] [35] constatent que :

$$P^{(01,01)1}(q = 0) \rightarrow 0 \quad (1.69)$$

$$P^{(11,11)1}(q = 0) \rightarrow 0 \quad (1.70)$$

Par ailleurs, P.A.M. Guichon *et al.* [1] [2] montrent que les 2 polarisabilités scalaires⁹ sont proportionnelles, à $q = 0$, à α et β mesurées en diffusion Compton réelle. Ils obtiennent :

$$P^{(01,01)0}(q = 0) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha}{e^2}, \quad P^{(11,11)0}(q = 0) = -\sqrt{\frac{8}{3}} \frac{\beta}{e^2} \quad (1.71)$$

avec e^2 et les polarisabilités α et β exprimés dans la même unité (si α et β s'expriment dans le système de Gauss alors $e^2 = 1/137$).

Outre le fait que l'on puisse retrouver α et β , le défi de l'expérience de diffusion Compton virtuelle, sous le seuil de production du pion, est d'accéder au plus grand nombre d'informations possibles sur les Polarités Généralisées à différents q . La mesure de ces nouvelles observables, fonctions de q et dépendantes de la structure électromagnétique du proton, va permettre d'élargir nos connaissances sur le nucléon et contraindre les modèles actuels qui tentent de le décrire.

Il nous reste donc maintenant à expliquer le moyen d'extraire ces Polarités Généralisées à partir des sections efficaces expérimentales de photo-électroproduction.

1.3.3.2 Principe d'extraction des Polarités Généralisées à partir des sections efficaces expérimentales

Pour les premières expériences de diffusion Compton virtuelle, réalisée à Mayence puis à Jefferson Lab., nous nous sommes limités à des expériences de photo-électroproduction non polarisées.

On rappelle que la section efficace de photo-électroproduction non polarisée s'exprime, dans le laboratoire, sous la forme :

$$\frac{d^5\sigma}{dk'_{lab} [d\Omega_e]_{lab} [d\Omega_p]_{CM}} = \frac{(2\pi)^{-5}}{64M} \left(\frac{k'_{lab}}{k_{lab}} \right) \frac{s - M^2}{s} \mathcal{M}^{exp} \quad (1.72)$$

avec \mathcal{M}^{exp} invariant de Lorentz. Les 5 variables indépendantes choisies pour décrire la réaction dans le centre de masse sont ($q, q', \epsilon, \theta_{\gamma^*\gamma}, \varphi$) définies page 19.

Par définition, \mathcal{M}^{exp} s'écrit :

$$\mathcal{M}^{exp} = \frac{1}{4} \sum_{spins} |T^{ee'\gamma}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spins} |T^{BH} + T_{Born}^{FVCS} + T_{Non-Born}^{FVCS}|^2 \quad (1.73)$$

En remplaçant $T^{ee'\gamma}$ par son expression (1.55) dérivée plus haut, on a :

$$\mathcal{M}^{exp} = \frac{1}{4} \sum_{spins} \left| \underbrace{\alpha_{-1}}_{BH+Born} q'^{-1} + \underbrace{\alpha_0}_{BH+Born} + \underbrace{\alpha_1}_{BH+Born} q' + \underbrace{a_1}_{Non-Born} q'^2 + \mathcal{O}(q'^2) \right| \quad (1.74)$$

9. On se place dans la limite d'un nucléon très lourd, ce qui nous permet de négliger les effets de recul. De plus, dans ce type de modèle, les termes de contact ou "Seagull" sont ignorés (cf. [1]).

On se souvient que $a_1 q'$ se décompose en multipôles, paramétrisés par les 6 Polarisabilités Généralisées, $P(q)$. En développant le carré de (1.74) jusqu'à l'ordre q'^0 et après réarrangement des termes du même ordre, on obtient :

$$\mathcal{M}^{exp} = \frac{1}{4} \sum_{spins} \left(\frac{\alpha_{-1}^2}{q'^2} + \frac{(\alpha_{-1}^* \alpha_0 + \alpha_{-1} \alpha_0^*)}{q'} + \alpha_0^2 + (\alpha_{-1}^* a_1 + \alpha_{-1} a_1^*) + \mathcal{O}(q') \right) \quad (1.75)$$

On remarque que a_1 n'apparaît que dans l'un des deux termes constants du développement. Après sommation sur les spins, nous aurons l'expression suivante pour \mathcal{M}^{exp} :

$$\mathcal{M}^{exp} = \frac{\mathcal{M}_{-2}^{exp}}{q'^2} + \frac{\mathcal{M}_{-1}^{exp}}{q'} + \mathcal{M}_0^{exp} + \mathcal{O}(q') \quad (1.76)$$

et nous supposons que les données expérimentales sont suffisamment précises pour extraire \mathcal{M}_{-2}^{exp} , \mathcal{M}_{-1}^{exp} et \mathcal{M}_0^{exp} .

En se reportant à l'équation (1.75) nous savons que \mathcal{M}_{-2}^{exp} et \mathcal{M}_{-1}^{exp} sont exactement calculables à partir des variables cinématiques (q , ϵ , $\theta_{\gamma^* \gamma}$, φ), de l'électro-dynamique quantique et des facteurs de forme élastiques. Par contre, à partir de (1.75), on voit que \mathcal{M}_0^{exp} est composé de deux termes : l'un calculable exactement et l'autre contenant la contribution des $P(q)$. Posons :

$$\mathcal{M}^{LET} = \frac{1}{4} \sum_{spins} |T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2 = \frac{\mathcal{M}_{-2}^{LET}}{q'^2} + \frac{\mathcal{M}_{-1}^{LET}}{q'} + \mathcal{M}_0^{LET} + \mathcal{O}(q') \quad (1.77)$$

\mathcal{M}^{LET} est complètement calculable (LET : Low Energy Theorem). D'après (1.75), on sait que, théoriquement, les coefficients \mathcal{M}_{-2}^{exp} et \mathcal{M}_{-1}^{exp} sont indépendants de a_1 . On devrait donc avoir les égalités suivantes :

$$\mathcal{M}_{-2}^{exp} = \mathcal{M}_{-2}^{LET} \quad (1.78)$$

$$\mathcal{M}_{-1}^{exp} = \mathcal{M}_{-1}^{LET} \quad (1.79)$$

La vérification de ces égalités prouvera qu'expérimentalement nous sommes bien dans le domaine de validité du théorème de basse énergie sur lequel repose tout le formalisme permettant de définir les Polarisabilités Généralisées. Il est évident que cette étape est fondamentale pour valider la méthode d'extraction des $P(q)$.

Extraction des Polarisabilités Généralisées :

Après validation du domaine d'applicabilité du théorème de basse énergie, on utilise l'expression dérivée dans la référence [1] :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{exp} - \mathcal{M}_0^{LET} = 2K_2 \left\{ v_1 [\epsilon P_{LL}(q) - P_{TT}(q)] \right. \\ \left. + \left(v_2 - \frac{\tilde{q}_0}{q} v_3 \right) \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)} P_{LT}(q) \right\} \end{aligned} \quad (1.80)$$

avec

$$K_2 = e^6 \frac{q}{\tilde{Q}^2} \frac{2M}{1-\epsilon} \sqrt{\frac{2E_q}{E_q + M}}, \quad E_q = \sqrt{M^2 + q^2} \quad (1.81)$$

Les fonctions angulaires (v_1, v_2, \dots) sont données par :

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin \theta \left(\omega'' \sin \theta - k_T \omega' \cos \theta \cos \phi \right), \\ v_2 &= - \left(\omega'' \sin \theta \cos \phi - k_T \omega' \cos \theta \right), \\ v_3 &= - \left(\omega'' \sin \theta \cos \theta \cos \phi - k_T \omega' (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \right) \end{aligned} \quad (1.82)$$

Les différentes variables cinématiques, $\tilde{Q}^2, k_T, \omega', \omega''$ sont définies pour $q' = 0$ et sont donc équivalentes aux variables cinématiques associées à la diffusion élastique correspondante. On définit :

$$\tilde{Q} = [Q]_{q'=0} \quad (1.83)$$

$$\omega = \left[-q' \left(\frac{1}{p \cdot q'} + \frac{1}{k \cdot q'} \right) \right]_{q'=0} \quad (1.84)$$

$$\omega' = \left[q' \left(\frac{1}{k' \cdot q'} - \frac{1}{k \cdot q'} \right) \right]_{q'=0} \quad (1.85)$$

$$\omega'' = \omega q - \omega' \sqrt{k'^2 - k_T^2} \quad (1.86)$$

$$k_T = \tilde{Q} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}} \quad (1.87)$$

On constate donc que $(\mathcal{M}_0^{exp} - \mathcal{M}_0^{LET})$ (équation (1.80)), dans le cas d'expériences non polarisées, s'exprime seulement en fonction de 3 paramètres indépendants (P_{LL} , P_{TT} et P_{LT}) qui sont des combinaisons linéaires de 5 polarisabilités à ε fixé :

$$P_{LL}(q) = -2\sqrt{6}m_e G_E P^{(01,01)0}(q) \quad (1.88)$$

$$P_{TT}(q) = -3G_M \frac{q^2}{\tilde{q}_0} \left(P^{(11,11)1}(q) - \sqrt{2}\tilde{q}_0 P^{(01,12)1}(q) \right) \quad (1.89)$$

$$P_{LT}(q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{mq}{\tilde{Q}} G_E P^{(11,11)0}(q) + \frac{3}{2} \frac{\tilde{Q}q}{\tilde{q}_0} G_M P^{(01,01)1}(q) \quad (1.90)$$

avec G_E et G_M , facteurs de forme élastiques du proton, combinaisons linéaires de F_1 et F_2 :

$$G_E(\tilde{Q}^2) = F_1(\tilde{Q}^2) - \frac{\tilde{Q}^2}{4M^2} F_2(\tilde{Q}^2) \quad (1.91)$$

$$G_M(\tilde{Q}^2) = F_1(\tilde{Q}^2) + F_2(\tilde{Q}^2) \quad (1.92)$$

Pour déterminer les 6 polarisabilités, il faudrait réaliser la diffusion Compton doublement polarisée (électrons polarisés, proton polarisé) ou (électrons polarisés, mesure de la polarisation du proton sortant) [29] [2].

Remarques :

- Dans le but d'extraire les 2 combinaisons linéaires $(\epsilon P_{LL}(q) - P_{TT}(q))$ et $P_{LT}(q)$ de l'expression (1.80), on fait varier $(\theta_{\gamma^* \gamma}, \varphi)$ à (q, ϵ) fixés. Ainsi, on est sensible aux différentes variations de l'interférence des termes Bethe-Heitler et FVCS.

- Le découplage entre $\epsilon P_{LL}(q)$ et $P_{TT}(q)$ implique que l'on fasse la même expérience pour deux valeurs différentes de ϵ .
- Notons que $P_{LL}(q)$ est particulièrement intéressante car elle est directement proportionnelle à $P^{(01,01)0}(q)$ correspondant à α dans la limite $q \rightarrow 0$.

Conclusion :

Les Polarisabilités Généralisées sont donc extraites à partir de la déviation entre la section efficace expérimentale mesurée et la section efficace théorique proportionnelle à $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$. Il nous faut donc maintenant quantifier l'effet de ces Polarisabilités Généralisées afin d'estimer si cette déviation est mesurable. Nous disposons à l'heure actuelle de plusieurs prédictions des Polarisabilités Généralisées reposant sur différents modèles du nucléon.

1.3.3.3 Prédictions des Polarisabilités Généralisées

Les toutes premières prédictions de l'effet des Polarisabilités Généralisées ont été réalisées dans le cadre d'un modèle "statique" [27] [26] qui ne considère qu'une seule résonance : le $\Delta(1232)$. Ensuite, d'autres prédictions sont issues de P.A.M. Guichon *et al.* [1]. Elles reposent sur le modèle non relativiste de quarks constituants décrit page 11. On trouvera dans [1] les évaluations de chacune des Polarisabilités Généralisées. Un autre modèle, tout-à-fait phénoménologique, est réalisé dans le cadre d'un Lagrangien effectif qui prend en compte les résonances $\Delta(1232)$, $P_{11}(1440)$, $D_{13}(1520)$, $S_{11}(1535)$, $S_{31}(1620)$, $S_{11}(1650)$, $D_{33}(1700)$ du nucléon ainsi que les diagrammes décrivant l'échange d'un et de deux pions dans la voie t . On qualifie ce dernier modèle de "Full Model". D'autres prédictions de l'effet des $P(q)$ existent dans le cadre du modèle linéaire Sigma (Linear Sigma Model) [30] [31] et de la théorie de perturbation chirale [32][33].

Nous préférons ici présenter l'effet global des Polarisabilités Généralisées prédit par ces différents modèles plutôt que l'effet de chacune des Polarisabilités. D'après ce qui précède, on sait que cet effet est essentiellement contenu dans la déviation entre $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS} + T_{Non-Born}^{FVCS}|^2$ et $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$. La figure (1.10), représentant différentes sections efficaces en fonction de l'angle $\theta_{\gamma^*\gamma}$, est particulièrement intéressante car en plus de mettre en évidence l'effet des Polarisabilités Généralisées, elle présente les comportements individuels des sections efficaces $|T^{BH}|^2$ et $|T_{Born}^{FVCS}|^2$. Si on se réfère à cette figure correspondant aux conditions cinématiques ($q = 600 \text{ MeV}/c$, $q' = 111.5 \text{ MeV}/c$, $\epsilon = 0.62$) réalisables auprès de l'accélérateur MAMI de Mayence, on constate que la section efficace Bethe-Heitler domine largement la section efficace totale dès que $\theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} > 0^\circ$. Les deux pics apparaissant à $\theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} \simeq 65^\circ$ et $\theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} \simeq 125^\circ$ correspondent respectivement aux deux cas suivants :

- 1- le photon réel final est émis dans la direction de l'électron incident,
- 2- le photon réel final est émis dans la direction de l'électron diffusé.

Ces deux pics constituent l'essentiel des corrections radiatives réelles à la diffusion élastique (cf. chapitre 2).

Quelle que soit la cinématique considérée, on cherchera toujours à s'éloigner des régions angulaires en $\theta_{\gamma^*\gamma}$ où le Bethe-Heitler est dominant.

Au regard de la figure (1.10), où $T_{Non-Born}^{FVCS}$ est calculé dans le cadre du modèle du Δ statique, et dans les conditions cinématiques indiquées, la région intéressante pour extraire les $P(q)$ correspond donc à $\theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} < 0^\circ$. On voit, en effet, que dans cette zone, la section efficace totale dévie légèrement de la section efficace proportionnelle à $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$.

Pour quantifier cette déviation, on se reportera à la figure (1.11) qui présente le rapport¹⁰ $(|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS} + T_{Non-Born}^{FVCS}|^2 - |T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2)/|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$ en fonction de $\theta_{CM}^{\gamma^*\gamma}$. Les ordres de grandeurs estimés par les différents modèles sont reportés dans le tableau (1.4). Dans tous les cas, ces estimations constituent un sérieux avertissement quant aux précisions requises sur la mesure de la section efficace expérimentale.

Modèle	Domaine angulaire	Effet des $P(q)$
Δ statique	$-180^\circ < \theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} < -25^\circ$	15%
NRQM	$-180^\circ < \theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} < -25^\circ$	$\pm 5\%$
“Full Model”	$-180^\circ < \theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} < -25^\circ$	7%
ChPT	$\theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} = -90^\circ$	-12%

Tableau 1.4 - *Synthèse des estimations des effets des polarisabilités dans différents modèles pour une cinématique réalisée à Mayence : $q=600\text{MeV}/c$, $q'=111.5\text{MeV}/c$, $k=855\text{MeV}/c$, $k'=539\text{MeV}/c$, $\theta_{lab}^{ee'} = 52.2^\circ$].*

Notre but étant de déterminer les Polarizabilités Généralisées à différentes valeurs de q , cette expérience de diffusion Compton virtuelle non polarisée, sous le seuil de production du pion, sera très prochainement réalisée auprès de l'accélérateur CEBAF¹¹ (printemps 98). Contrairement à Mayence où on travaillait à $Q^2 = 0.33(\text{GeV}/c)^2$, le domaine en Q^2 exploré à CEBAF sera 1 à $2(\text{GeV}/c)^2$. Les figures (1.12) et (1.13) sont le pendant des figures (1.10) et (1.11) adaptées à l'une des cinématiques de CEBAF. Ces prédictions ont été calculées par M. Vanderhaeghen à l'aide du Lagrangien effectif relativiste.

En observant les figures [1.13] et [1.12] correspondant à ($q=1\text{GeV}/c$, $q'=120\text{MeV}/c$, $\varepsilon = 0.95$), on prendra des données dans l'intervalle $\theta_{\gamma^*\gamma} = [-25^\circ, 25^\circ]$. Dans cette région, l'effet des polarisabilités varie entre 10% et 26% et nous nous affranchissons des pics correspondant au photon réel émis dans la direction des électrons.

Il est important de remarquer que les sections efficaces sont proportionnelles à $(\frac{1}{1-\varepsilon})$, flux de photons virtuels (cf. [43], p.56). A MAMI $\varepsilon = 0.62$ tandis qu'à CEBAF $\varepsilon = 0.95$, par conséquent, les taux de comptage sont considérablement augmentés à CEBAF.

10. En toute rigueur, seulement le lagrangien effectif relativiste est complet dans cette évaluation.

11. CEBAF : Continuous Electron Beam Accelerator Facility (Jefferson Lab., NewportNews, Virginie, USA), cf. chapitre 1. CEBAF délivre un faisceau continu d'électrons dont l'énergie peut varier entre 500MeV et 6GeV

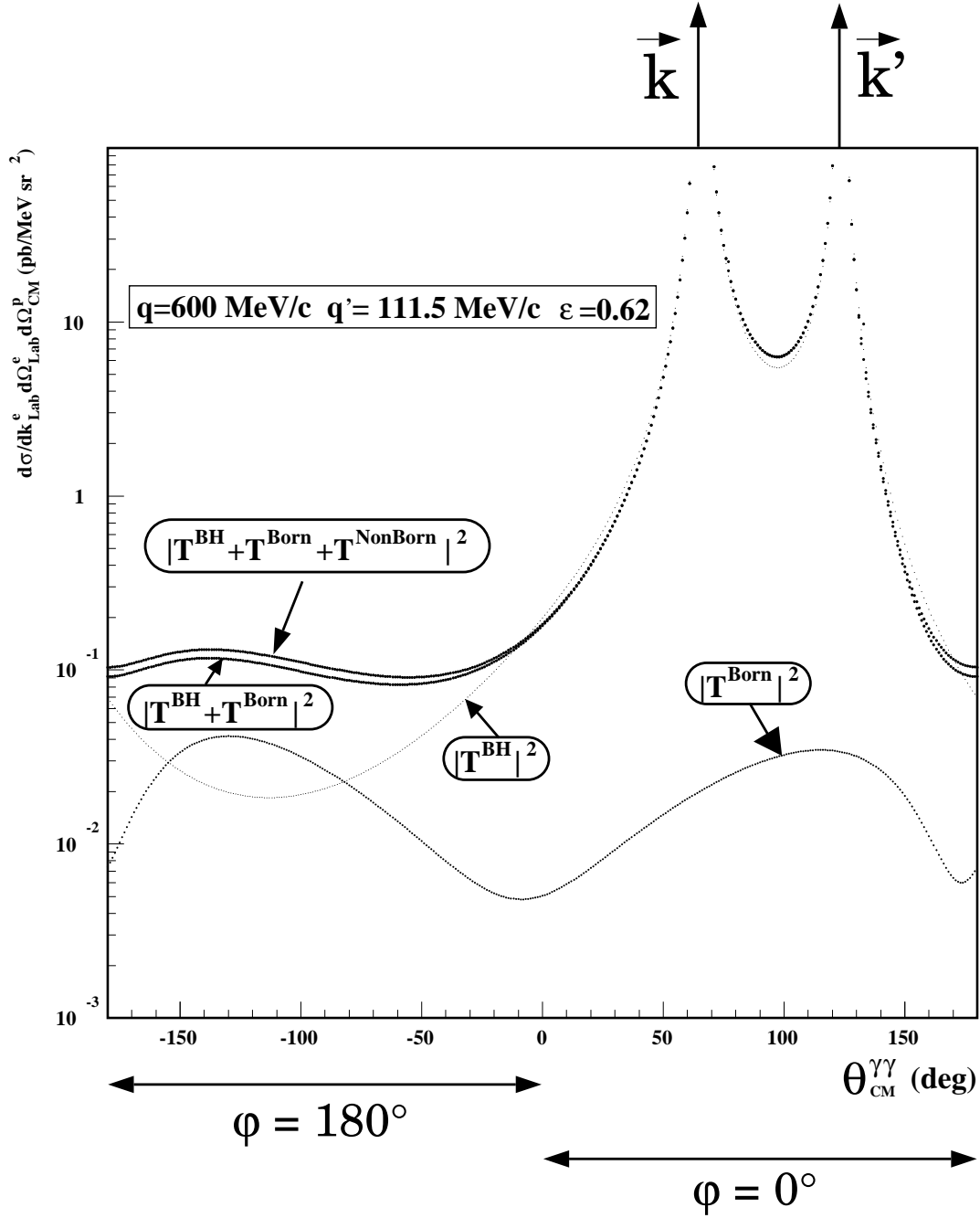


Figure 1.10 - Pour (q, q', ϵ) fixés, représentation des sections efficaces correspondant à $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS} + T_{Non-Born}^{FVCS}|^2$ (1), $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$ (2), $|T^{BH}|^2$ et $|T_{Born}^{FVCS}|^2$. Pour $-180^\circ \leq \theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} \leq 50^\circ$ et $\varphi = 180^\circ$, on note une légère déviation entre (1) et (2) associée à l'effet des Polarizabilités Généralisées. Lorsque le photon réel final est émis dans la direction de l'électron incident ou de l'électron diffusé, la section efficace Bethe-Heitler présente un maximum. [Cinématique de Mayence : $q=600\text{MeV}/c$, $q'=111.5\text{MeV}/c$, $k=855\text{MeV}/c$, $k'=539\text{MeV}/c$, $\theta_{lab}^{ee'} = 52.2^\circ$]

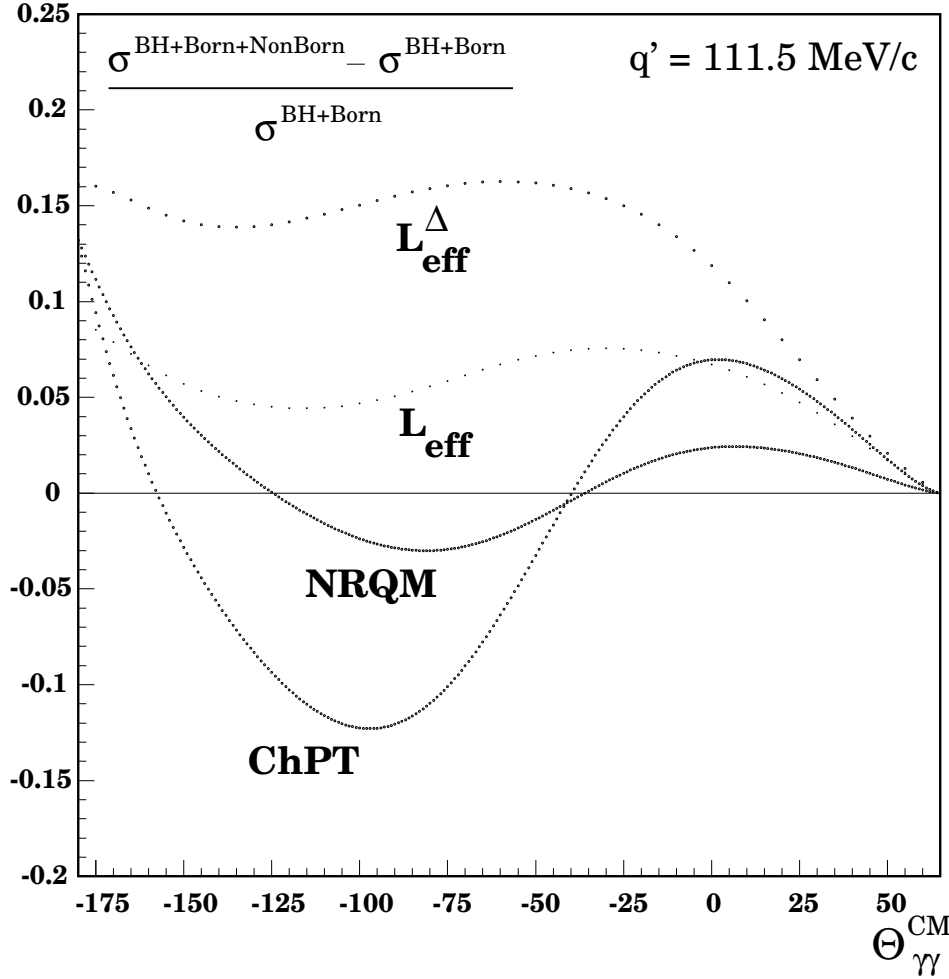


Figure 1.11 - *Effet des Polarisabilités Généralisées* calculé dans le cadre du modèle de quarks non relativiste (**NRQM**) à partir d'un Lagrangien effectif relativiste ($\mathbf{L}_{\text{eff}}^{\Delta}$) et ($\mathbf{L}_{\text{eff}}^{\text{Full}}$) [27] ainsi que dans le cadre de la théorie de perturbation chirale (**ChPT**). Dans ($\mathbf{L}_{\text{eff}}^{\text{Full}}$) ont été introduites les contributions des résonances du nucléon : $\Delta(1232)$, $P_{11}(1440)$, $D_{13}(1520)$, $S_{11}(1535)$, $S_{31}(1620)$, $S_{11}(1650)$, $D_{33}(1700)$ ainsi que les échanges de mésons scalaires dans la voie t . Dans ($\mathbf{L}_{\text{eff}}^{\Delta}$), seule la contribution de la résonance Δ est prise en compte. Seul l'intervalle $\theta_{CM}^{\gamma^*\gamma} = [-180^\circ, 50^\circ]$ a été représenté pour s'affranchir des régions dominées par la section efficace Bethe-Heitler. [Cinématique de Mayence : $q=600\text{MeV}/c$, $q'=111.5\text{MeV}/c$, $k=855\text{MeV}/c$, $k'=539\text{MeV}/c$, $\theta_{lab}^{ee'} = 52.2^\circ$]

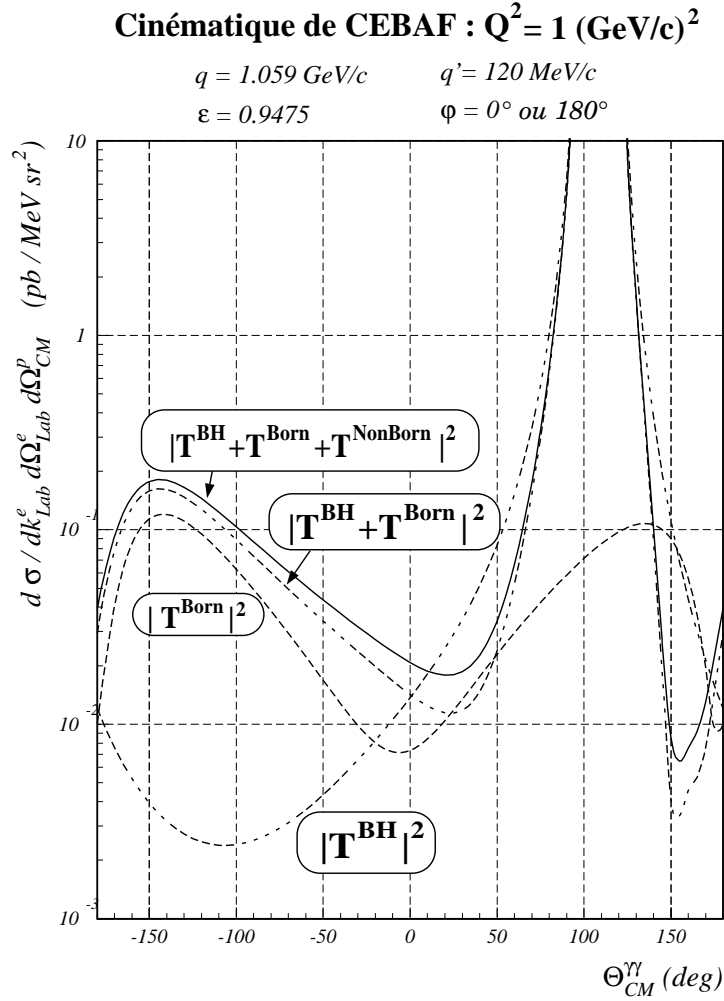


Figure 1.12 - Pour (q, q', ϵ) fixés correspondant aux conditions de CEBAF, représentation des sections efficaces associées à $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS} + T_{Non-Born}^{FVCS}|^2$ (1) [Lagrangien effectif relativiste contenant uniquement la contribution de la résonance $\Delta(1232)$], $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$ (2), $|T^{BH}|^2$ et $|T_{Born}^{FVCS}|^2$. Pour $-180^\circ \leq \theta_{CM}^{\gamma*} \leq 50^\circ$ et $\varphi = 180^\circ$, la déviation entre (1) et (2) contient l'effet des Polarizabilités Généralisées. Pour $\theta_{CM}^{\gamma*} \simeq 120^\circ$, la direction du photon réel final coïncide avec celle de l'électron incident et de l'électron diffusé. [$k=4 \text{ GeV/c}$, $k'=3.3 \text{ GeV/c}$, $\theta_{lab}^{ee'} = 15.75^\circ$]

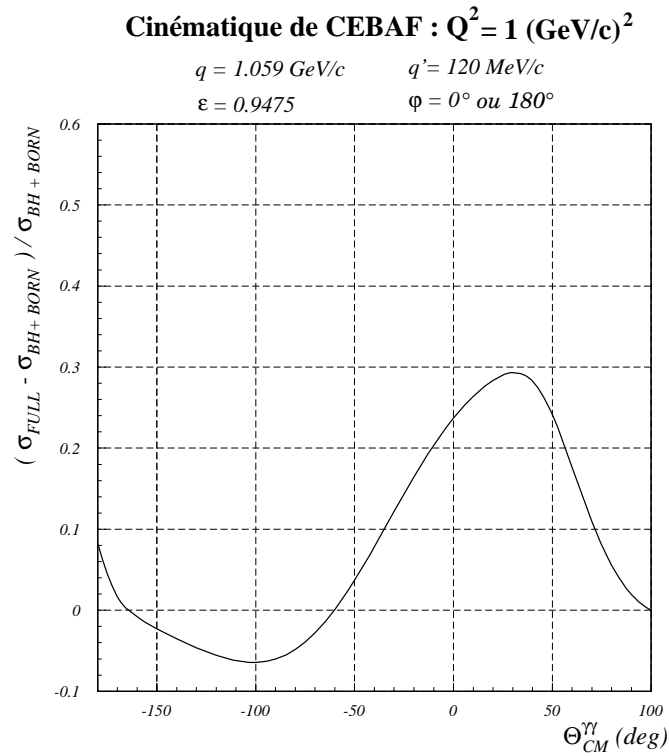


Figure 1.13 - *Effet des Polarisabilités Généralisées calculé à l'aide du Lagrangien effectif relativiste ou "Full Model" pour une cinématique qui sera réalisée à Jefferson Lab. [$k=4 \text{ GeV/c}$, $k'=3.3 \text{ GeV/c}$, $\theta_{lab}^{ee'} = 15.75^\circ$]*

L'ensemble de ces résultats théoriques nous convaint de l'extrême difficulté de cette expérience. En effet, la petitesse de l'effet recherché nous oblige à déterminer la section efficace avec une très grande précision. Ceci implique que l'on acquière un grand nombre de données pour minimiser l'erreur statistique et que l'on procède à une analyse minutieuse pour réduire les incertitudes systématiques. L'enjeu essentiel de cette expérience est de pouvoir déterminer la section efficace expérimentale à 3% près. Ceci constitue un véritable défi mais c'est le prix à payer pour espérer pouvoir mesurer pour la première fois des Polarisabilités Généralisées avec une incertitude de 30%.

1.4 Conclusion

L'enjeu des expériences de diffusion Compton virtuelle, sous le seuil de production du pion, est de mesurer les Polarisabilités Généralisées définies à partir du formalisme développé par P.A.M. Guichon *et al.* en 1995. Seules 2 combinaisons linéaires de 5 polarisabilités seront accessibles via les premières expériences non polarisées réalisées auprès de MAMI [38] et prochainement auprès de CEBAF [39]. Pour les extraire, il faudra s'assurer que le théorème de basse énergie est applicable, contrôler la section efficace mesurée à 3% près et maîtriser les effets radiatifs dus aux électrons. Dans le chapitre 3, consacré au calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle, on présentera l'effet des corrections radiatives virtuelles pour différentes cinématiques qui seront réalisées à Jefferson Lab ($0.3 \text{ (GeV/c)}^2 < Q^2 < 2 \text{ (GeV/c)}^2$). Des résultats préliminaires de l'expérience de diffusion Compton virtuelle à Mayence ($Q^2=0.3 \text{ (GeV/c)}^2$) figurent dans la thèse de D. Lhuillier [3]. Les résultats définitifs ainsi que l'extraction des polarisabilités seront discutés dans la thèse de J. Roche (1999).

Une autre expérience de diffusion Compton virtuelle est en cours de réalisation à Bates (MIT, USA) [41]. L'originalité de cette expérience réside dans la capacité du système de spectromètres d'effectuer des mesures "hors plan", c'est-à-dire à $\varphi \neq 0, 180^\circ$ soit en dehors de la large contribution du "Bethe-Heitler". Ceci devrait permettre à cette expérience d'obtenir une bonne sensibilité pour la mesure des Polarisabilités Généralisées.

La prochaine étape dans cette recherche d'information sur la structure électromagnétique du proton sera d'effectuer des mesures avec polarisation afin d'accéder à 6 observables et déterminer les 6 Polarisabilités Généralisées $P(q)$ définies dans les références [1] [29] [2]. Dans [28][29], M. Vanderhaeghen présente des estimations de l'effet des $P(q)$ dans différents modèles. Il suppose d'une part un faisceau incident polarisé et d'autre part une cible polarisée ou une mesure de la polarisation des protons diffusés grâce à un polarimètre de plan focal.

J'insisterai enfin sur l'intérêt croissant que suscite actuellement la diffusion Compton virtuelle. La diffusion Compton virtuelle sous le seuil de production du pion, étudiée présentement, a en effet ouvert la voie à un large programme de recherche [42] sur la structure du nucléon. On a représenté sur la figure (1.14) les différents domaines cinématiques qui nous permettront d'accéder à de nouvelles informations sur le nucléon.

Outre la région de basse énergie où seront déterminées les Polarisabilités Généralisées, on citera :

- la région des résonances $[(M + m_\pi)^2 < s < 4\text{GeV}^2]$:
 Dans la région des plus basses résonances, $\Delta(1232)$, $N^*(1440, 1520 \text{ and } 1535)$, la diffusion Compton virtuelle fournit une information indépendante sur les multipôles des résonances et constitue un excellent moyen de contrôle sur la consistance de l'analyse. A plus haute énergie, on s'intéressera aux résonances manquantes. Cette région est l'objet d'une proposition d'expérience auprès de CEBAF [39].
- le domaine de haute énergie $[s > 4\text{GeV}^2]$:
 Ce domaine se divise lui-même en deux régions cinématiques en fonction des valeurs des invariants t et Q^2 :
 - la région où $s, Q^2 \rightarrow \infty$ et t petit (région diffractive). La diffusion Compton virtuelle alors dite “profondément inélastique” (Deep VCS) permettra la détermination de nouvelles fonctions de structure du nucléon. Ces fonctions de structure donneront accès à la contribution du moment angulaire, porté par les quarks, au spin du nucléon, ΔL_q .

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta u + \Delta d + \Delta s) + \Delta g + \Delta L_q$$

- dans l'intervalle en $\theta_{\gamma^*\gamma}$ centré sur $(\frac{\pi}{2})$ correspondant à t et u grands, nous sommes supposés être dans le régime de la chromo-dynamique quantique perturbative qui prédit une factorisation de l'amplitude de transition. Si tel est le cas, alors il sera possible d'extraire la fonction d'onde des trois quarks de valence du nucléon (expérience exploratoire proposée par V. Breton *et al.* [40]).

Cette liste est loin d'être exhaustive puisque de nombreux développements théoriques sont toujours en cours. Du point de vue expérimental, des études sont menées de part le monde pour proposer des expériences du type VCS et/ou RCS auprès des accélérateurs actuels équipés pour mesurer de faibles sections efficaces. Etant donné la dynamique des équipes de recherche dans ce domaine, on peut dès lors supposer que la diffusion Compton virtuelle, de part son énorme potentiel scientifique, sera un des enjeux majeurs des collaborations internationales impliquées dans la physique hadronique d'aujourd'hui et de demain.

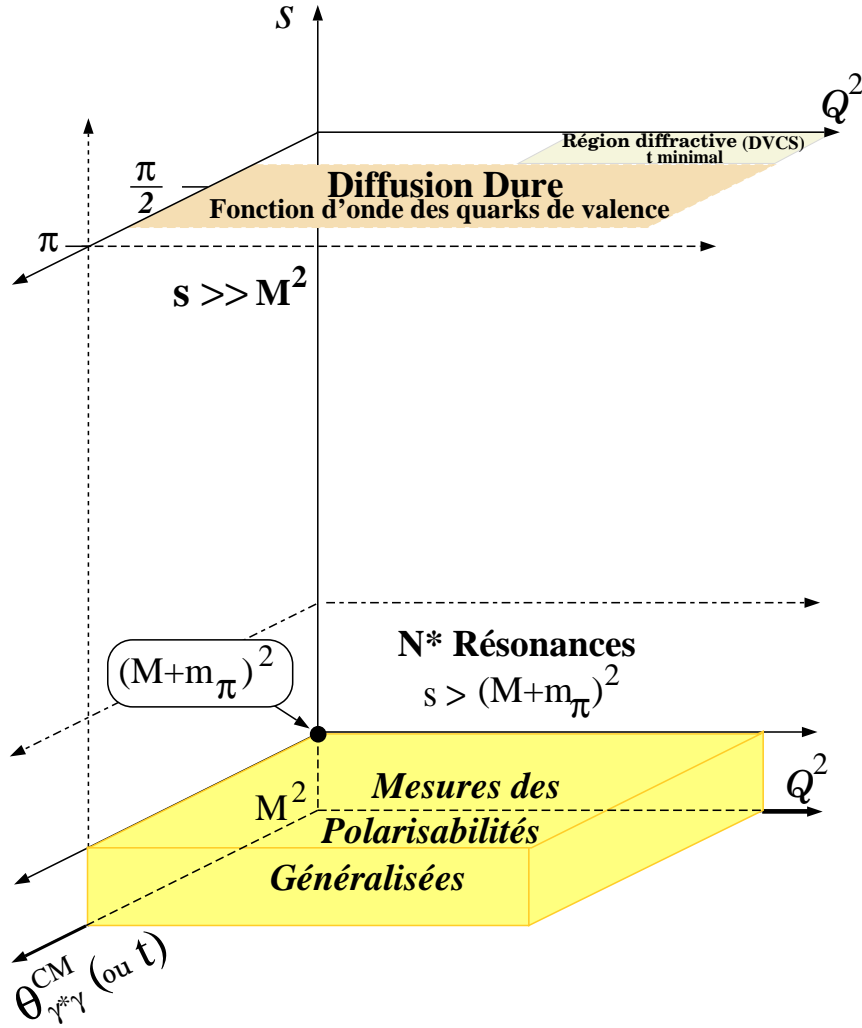


Figure 1.14 - Illustration graphique du programme de recherche accessible par diffusion Compton virtuelle selon le domaine cinématique considéré. L'axe vertical représente l'énergie totale disponible, $s = (q + p)^2$. Les axes définissant les plans horizontaux correspondent à la masse carrée invariante du photon virtuel, Q^2 , et à l'angle $\theta_{\gamma^*\gamma}$ défini dans le centre de masse. On notera que ce dernier est directement relié à l'invariant t . Ce graphe se divise en trois régions cinématiques particulièrement intéressantes en fonction de la valeur de s , la région des polarisabilités à basse énergie, la région des résonances et la région de haute énergie, $s \rightarrow \infty$.

Chapitre 2

Corrections radiatives à la diffusion élastique

Le but de ce chapitre est d'introduire les concepts nécessaires à tout calcul de corrections radiatives. Afin de faciliter l'approche, nous nous appuierons, tout au long de ce chapitre, sur la diffusion élastique $e\,p \rightarrow e'\,p'$ dont les corrections radiatives ont été calculées pour la première fois par J. Schwinger [59]. A partir de cette réaction simple, nous définirons tous les outils et notions indispensables au traitement ultérieur des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle. Les articles de L.W. Mo & Y.S. Tsai [47] et L.C. Maximon [54] sont les références incontournables en matière de corrections radiatives aux expériences de diffusion d'électrons. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que les effets radiatifs dus aux électrons. Il est en effet légitime de négliger les effets radiatifs issus du proton car, dans notre expérience, celui-ci n'est pas relativiste. Après avoir précisé ce que l'on entend par corrections radiatives externes nous nous intéresserons aux corrections radiatives internes qui, seules, feront l'objet d'une étude détaillée.

2.1 Généralités

En physique nucléaire et physique des particules, lorsqu'on réalise une expérience il est essentiel de pouvoir comparer les résultats obtenus expérimentalement avec les prédictions théoriques afin, par exemple, de tester des modèles. Dès lors que des particules chargées sont impliquées dans l'expérience, il est indispensable de corriger la section efficace expérimentale brute σ_{exp} des effets radiatifs qui ne sont pas pris en compte théoriquement.

Nous distinguerons les corrections radiatives externes des corrections radiatives internes :

- corrections radiatives externes \rightarrow le noyau impliqué dans le processus radiatif n'est pas celui qui est responsable de la diffusion principale,
- corrections radiatives internes \rightarrow le noyau impliqué est celui de la réaction principale. Elles tiennent compte des deux types de rayonnement : émissions de photons réels et émissions/réabsorptions de photons virtuels.

Soit :

σ_{th} : la section efficace théorique ne tenant pas compte des effets radiatifs,

σ_{exp} : la section efficace expérimentale mesurée brute,

σ_{eff} : la section efficace expérimentale correspondant à une cible d'épaisseur nulle où seul le noyau responsable de la diffusion principale serait présent,

σ_0 : la section efficace expérimentale corrigée des effets radiatifs, comparable à σ_{th} .

On passera de σ_{exp} à σ_{eff} en appliquant les corrections radiatives externes et de σ_{eff} à σ_0 en appliquant les corrections radiatives internes.

Notons qu'un processus supplémentaire doit être pris en compte : la diffusion de l'électron (incident ou diffusé) et du proton sur les électrons atomiques. Ce dernier processus, non radiatif, conduit à l'ionisation des atomes et est connu sous le nom de "Landau straggling" [52]. Il contribue à la perte d'énergie moyenne ainsi qu'à l'élargissement de la distribution en énergie des électrons diffusés. Pour les expériences qui se sont déroulées à Mayence (diffusion élastique et diffusion Compton virtuelle), cet effet est directement pris en compte dans le programme d'analyse.

Nous commencerons par introduire brièvement les corrections radiatives externes avant de nous focaliser sur le calcul des corrections radiatives internes à la diffusion élastique.

2.2 Corrections radiatives externes

Les effets radiatifs externes désignent les pertes d'énergie par rayonnement de freinage (ou Bremsstrahlung) des électrons incidents et diffusés dans le champ électromagnétique des noyaux des atomes ne participant pas à la réaction principale, c'est-à-dire des noyaux autres que celui responsable de la diffusion.

La figure (2.1) permet de distinguer les effets radiatifs externes des effets radiatifs internes. De plus, elle représente schématiquement ce qu'il se passe expérimentalement lors d'une réaction de diffusion d'électrons sur des protons.

L'électron incident d'énergie initiale E interagit d'une part avec les atomes des parois de la cible et d'autre part avec les atomes présents dans la cible différents de celui qui est responsable de la diffusion proprement dite. L'énergie "vraie" de l'électron diffusant sur le proton est $\tilde{E} = E - \Delta E_B$ avec ΔE_B la perte d'énergie qu'a subi l'électron par Bremsstrahlung avant d'interagir. Après diffusion sur le proton, l'électron sortant aura une énergie \tilde{E}' mais il sera détecté avec une énergie $E' = \tilde{E}' - \Delta E'_B$ après avoir parcouru une certaine distance dans la cible et traversé les parois de sortie.

La probabilité pour qu'un électron incident (respectivement diffusé) d'énergie initiale E (resp. \tilde{E}') perde $\Delta E_B = E - \tilde{E}$ (resp. $\Delta E'_B = \tilde{E}' - E'$) en parcourant une épaisseur t (resp. t') (exprimée en longueurs de radiation) dans la cible (cible et parois), est [46] :

$$I(E, \tilde{E}, t) = \frac{X_0 t}{\Gamma(1 + bt)} \left(\frac{\Delta E_B}{E} \right)^{bt} W_b(E, \Delta E_B) \quad (2.1)$$

$$I(\tilde{E}', E', t') = \frac{X_0 t'}{\Gamma(1 + bt')} \left(\frac{\Delta E'_B}{\tilde{E}'} \right)^{bt'} W_b(\tilde{E}', \Delta E'_B) \quad (2.2)$$

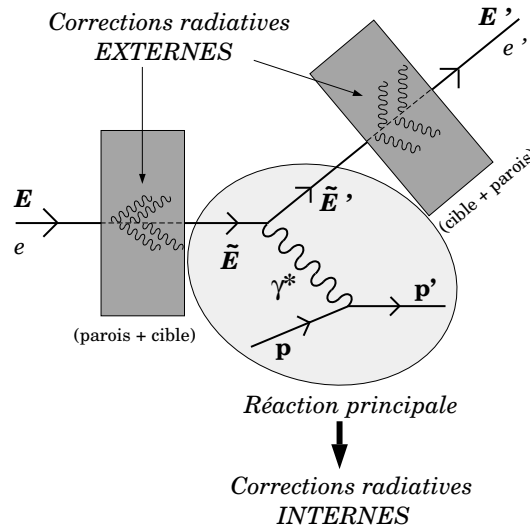


Figure 2.1 - Schéma de l'expérience de diffusion élastique $e p \rightarrow e' p'$; mise en évidence des effets radiatifs externes. Les corrections radiatives internes ne concerneront que les rayonnements associés à la réaction principale, c'est-à-dire associés au noyau diffuseur proprement dit.

avec :

- $b \simeq \frac{4}{3}$,
- X_0 : unité de longueur de radiation pour le matériau considéré exprimée en $[\text{g.cm}^{-2}]$,
- t (resp. t') : épaisseur de matériau traversé par l'électron incident (resp. diffusé) en unités de longueur de radiation. Si d est la densité superficielle du matériau traversée exprimée en $[\text{g.cm}^{-2}]$ alors $t = \frac{d}{X_0}$ (sans dimension). Généralement, les électrons traversent plusieurs type de matériaux (cible $[m_1]$, parois $[m_2]$, ..., $[m_n]$). Dans ce cas, on remplace dans (2.1) $(X_0 t)$ par $(d_1 + d_2 + \dots + d_n)$ avec d_1, \dots, d_n les densités superficielles associées aux matériaux m_1, \dots, m_n . On exprime t sous la forme :

$$t = \frac{d_1}{X_0^1} + \frac{d_2}{X_0^2} + \dots + \frac{d_n}{X_0^n} \quad (2.3)$$

avec X_0^1, \dots, X_0^n les unités de longueur de radiation relatives aux différents matériaux traversés.

- W_b : fonction de distribution de Bremsstrahlung. $W_b(E, \Delta E_B) = \frac{b}{X_0} \frac{1}{\Delta E_B} \phi\left(\frac{\Delta E_B}{E}\right)$
 $\phi(v)$ décrit l'écart de la forme réelle du spectre de Bremsstrahlung à la loi simple en $(1/\Delta E_B)$. ϕ dépend de l'effet d'écran du champ électromagnétique des noyaux par les électrons atomiques. Dans le cas d'électrons relativistes, l'écran est toujours total : $\phi(v) \simeq 1 - v + \frac{3}{4}v^2$.
- $\frac{1}{\Gamma(1+bt)} \left(\frac{\Delta E_B}{E}\right)^{bt}$: terme corrigeant la fonction de distribution de Bremsstrahlung (W_b) pour tenir compte de l'émission de plusieurs photons réels.

Cette fonction de distribution analytique (2.1), dérivée par Y.S. Tsai [46], reproduit le résultat obtenu numériquement par R. Early [49] à mieux que 1% près pour $t < 0.05$ et $\frac{\tilde{E}}{E} > 0.2$ [48], conditions qui seront réalisées pour l'expérience de diffusion Compton virtuelle à Mayence et à Jefferson Lab.

D'après (2.1), on note que la probabilité pour qu'un électron perde une quantité d'énergie donnée par Bremsstrahlung varie linéairement avec l'épaisseur de la cible dans l'approximation où cette épaisseur reste faible ($bt \ll 1$). Par ailleurs, on sait que le nombre d'événements issus de la diffusion qui nous intéresse est fonction de la luminosité proportionnelle à l'épaisseur de la cible. On peut alors montrer que la probabilité pour qu'un même électron puisse à la fois perdre de l'énergie par Bremsstrahlung et participer à la réaction principale est proportionnelle au carré de l'épaisseur de la cible. Il s'ensuit que les corrections radiatives externes seront d'autant plus importantes que la cible sera épaisse. On cherchera donc toujours à minimiser l'épaisseur de la cible ainsi que celle des parois.

L'approximation dite du "peaking angulaire" [47] a pour origine le fait que la distribution angulaire des photons réels émis par Bremsstrahlung est très piquée sur l'avant avec une ouverture angulaire de largeur caractéristique $(1/\gamma)$ ($\gamma = E/m_e$ et m_e masse de l'électron). Cette approximation consiste à négliger l'angle d'émission des photons. En conséquence, la direction des électrons (incident et diffusé) reste inchangée. Nous adoptons cette approximation pour l'évaluation des corrections radiatives externes uniquement.

La section efficace expérimentale corrigée des effets radiatifs externes σ_{eff} s'écrit :

$$\sigma_{eff} = \sigma_{exp} \frac{1}{(1 + \delta')} \quad (2.4)$$

avec δ' la correction associée aux effets radiatifs externes. Le δ' que l'on applique aux données s'exprime [45] :

$$\delta' = \frac{1}{\Gamma(1 + bt_i)} \left[\frac{E}{E'} \frac{\Delta E'_B}{E'} \right]^{bt_i} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + bt_d)} \left[\frac{\Delta E'_B}{E'} \right]^{bt_d} - 1 \quad (2.5)$$

où t_i et t_d représentent respectivement les épaisseurs de matériaux traversées par l'électron incident et l'électron diffusé. Etant donné que les cibles sont en forme de tube, t_d est fonction de l'angle de diffusion.

Ordre de grandeur des corrections radiatives externes

A partir de la connaissance des caractéristiques du milieu cible considéré, on peut calculer les corrections radiatives externes à appliquer à la section efficace.

Dans le tableau (2.1), nous présentons l'effet des corrections radiatives externes sur la section efficace élastique $p(e,e')p'$. Nous considérons la cible cryogénique utilisée dans le hall A1 à Mayence et celle du Hall A à Jefferson Lab. Dans les deux cas on adopte $\Delta E'_B = 15 MeV$. Soit les cinématiques :

- Mayence (Hall A1) :

$$\begin{aligned} E &= 795\text{MeV} \\ E' &= 599.7\text{MeV} \\ \theta_{lab}^{ee'} &= 52^\circ \end{aligned}$$

- Jefferson Lab (Hall A) :

$$\begin{aligned} E &= 4000\text{MeV} \\ E' &= 3448\text{MeV} \\ \theta_{lab}^{ee'} &= 15.75^\circ \end{aligned}$$

Cible	t_i	t_d	$\delta' (\%)$	$1/(1+\delta')$
Hall A1	$3.37 \cdot 10^{-3}$	$1.50 \cdot 10^{-3}$	-1.87	1.019
Hall A	$9.46 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$	-11.84	1.134

Tableau 2.1 - *La longueur de radiation associée à l'hydrogène liquide est : $X_0^{LH_2} = 865\text{cm}$. Les parois de la cible utilisée dans le hall A1 à Mayence sont en havar (Fer) : $X_0^{Fe} = 1.76\text{cm}$. Celles de la cible du hall A de Jefferson Lab sont en Aluminium : $X_0^{Al} = 8.9\text{cm}$. A Mayence, la cible mesure 4.95cm de long et 1.15cm de large. A Jefferson Lab, la cible est un cylindre (canette) de 15cm de long et 6.35cm de diamètre. La formule utilisée pour le calcul de δ' est (2.4).*

Pour de plus amples détails sur le calcul des corrections radiatives externes que nous avons appliqué, on se reportera aux références [51] et [3].

Après ce bref aperçu des corrections externes, nous allons maintenant nous consacrer au calcul des corrections radiatives qualifiées d'internes. Dorénavant, comme seul ce dernier type de corrections radiatives sera étudié, il ne sera plus nécessaire de spécifier le qualificatif "interne".

2.3 Corrections radiatives internes

Les effets radiatifs internes désignent l'émission de photons réels et les échanges de photons virtuels émanant de la réaction principale : $p(e,e')p'$.

Ce calcul des corrections radiatives implique la prise en compte des effets radiatifs de type réel et virtuel. Après une discussion sur les différents processus à considérer, nous donnerons les grandes lignes du calcul. Nous montrerons entre autres que les expressions de chacun des graphes entrant en ligne de compte font apparaître des divergences ultraviolettes et infrarouges qu'il faudra régulariser pour réussir à mener le calcul jusqu'à obtenir un résultat fini. Parmi les nombreuses méthodes de régularisation existantes, nous avons choisi la régularisation dimensionnelle car elle présente l'avantage de respecter l'invariance de jauge. Après renormalisation, c'est à dire passage à des quantités physiques,

nous constaterons que les divergences ultraviolettes disparaissent. Nous verrons ensuite comment les divergences infrarouges restantes, issues des effets radiatifs, virtuels d'une part et réels d'autre part, se compenseront au niveau de la section efficace pour finalement donner une correction radiative interne finie.

2.3.1 Introduction

Dès lors que des particules chargées sont mises en jeu dans une expérience de diffusion, l'interaction électromagnétique entre en ligne de compte. Actuellement, le seul moyen de décrire cette interaction est d'employer une méthode perturbative exprimant l'amplitude de diffusion sous forme d'une série en puissances de $Z\alpha$ où $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ est la constante de couplage de l'interaction électromagnétique appelée également constante de structure fine de QED et Z le numéro atomique de la cible considérée. On voit que cette décomposition en série perturbative sera d'autant plus justifiée que $Z\alpha \ll 1$, c'est-à-dire Z proche de 1. Dans le cas de la diffusion élastique $p(e,e')p'$ que nous nous proposons d'étudier dans un premier temps, $Z = 1$. L'amplitude de diffusion \mathcal{M} s'écrit :

$$\mathcal{M} = \underbrace{\mathcal{A}_0}_{\text{ordre } \alpha} + \underbrace{\mathcal{A}_1}_{\text{ordre } \alpha^2} + \dots$$

Elevé au carré, \mathcal{A}_0 , le terme d'ordre le plus bas en α de la série perturbative représente la probabilité de diffusion du processus considéré à l'ordre le plus bas soit α^2 . Cette probabilité ou section efficace, à l'ordre le plus bas, est appelée approximation de Born. Dans le cas de la diffusion élastique $p(e,e')p'$, l'approximation de Born correspondra à l'échange d'un seul photon virtuel entre les bras leptonique et hadronique. Tous les ordres supérieurs en α du développement de la section efficace constituent les corrections radiatives.

Pratiquement, pour calculer les corrections radiatives à un processus quelconque, seuls les graphes contribuant à l'ordre immédiatement supérieur à l'approximation de Born seront pris en compte. Cette limitation vient du fait que le nombre de graphes à prendre en compte croît très rapidement entre l'ordre n et l'ordre $n+1$, ce qui complique notablement le calcul.

L'amplitude d'un processus de diffusion électromagnétique est obtenue à partir des règles de Feynman rappelées dans l'annexe B. Pratiquement, il est facile de déterminer l'ordre le plus bas en α de la série en dénombrant les couplages de photons aux particules chargées. En effet, dans l'amplitude de diffusion, à chacun de ces couplages est associé un facteur $(-iq\gamma)$ proportionnel à la charge $q = \pm|e|$ de la particule couplée au photon. Dans le cas de la diffusion élastique illustrée sur la figure (2.2), on constate que l'ordre le plus bas de l'amplitude de diffusion, ou approximation de Born, est d'ordre α , ce qui correspond à l'échange d'un seul photon virtuel entre les bras leptonique et hadronique.

Comme la section efficace est proportionnelle au carré de l'amplitude de diffusion, l'ordre en α le plus bas au niveau de la section efficace sera en α^2 . Etant donné que nous nous limiterons à l'ordre immédiatement supérieur à l'approximation de Born, il suffira de considérer, pour le calcul des corrections radiatives, tous les graphes contribuant à l'ordre α^3 au niveau de la section efficace. En négligeant les effets radiatifs issus du proton, l'ensemble des graphes à considérer sont représentés sur la figure (2.3), comme nous allons

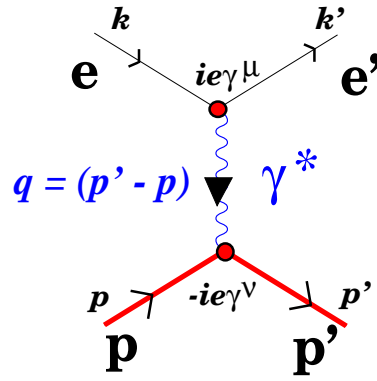


Figure 2.2 - *Approximation de Born pour la diffusion élastique. Ce premier terme de l'amplitude de diffusion est d'ordre α . k , k' , p et p' sont les quadrivecteurs impulsion-énergie associés respectivement à l'électron incident, l'électron sortant, le proton initial et le proton diffusé.*

le montrer dans la suite.

Les graphes a, b1, b2, c, d1 et d2 sont associés aux corrections radiatives virtuelles tandis que les graphes e1 et e2 constituent les corrections radiatives réelles. On constate que les graphes correspondant aux corrections virtuelles et ceux associés aux corrections réelles ne présentent pas le même état final.

- Les graphes des corrections virtuelles conduisent au même état final que l'approximation de Born. Leur contribution est prise en compte au niveau de l'expression de l'amplitude de diffusion.
- Les graphes des corrections radiatives de type réel conduisent, quant à eux, à un état final différent de celui de l'approximation de Born puisqu'un photon réel de basse énergie supplémentaire est émis. Ces graphes ne peuvent donc pas être pris en compte au niveau de l'amplitude de diffusion. Leur contribution sera ajoutée au niveau de la section efficace.

Echanges de photons virtuels :

En ne tenant compte que des graphes d'échange(s) de photon(s) virtuel(s), la densité de probabilité associée s'écrit sous la forme de la série perturbative¹ :

$$P = |\mathcal{V}_1 \alpha + \mathcal{V}_2 \alpha^2 + \mathcal{V}_3 \alpha^3 + \dots|^2 \quad (2.6)$$

$$= \underbrace{|\mathcal{V}_1|^2 \alpha^2}_{P_2} + \underbrace{2\mathcal{R}e(\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2^*) \alpha^3}_{P_3} + \underbrace{|\mathcal{V}_2|^2 \alpha^4 + 2\mathcal{R}e(\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_3) \alpha^4}_{P_4} + \dots \quad (2.7)$$

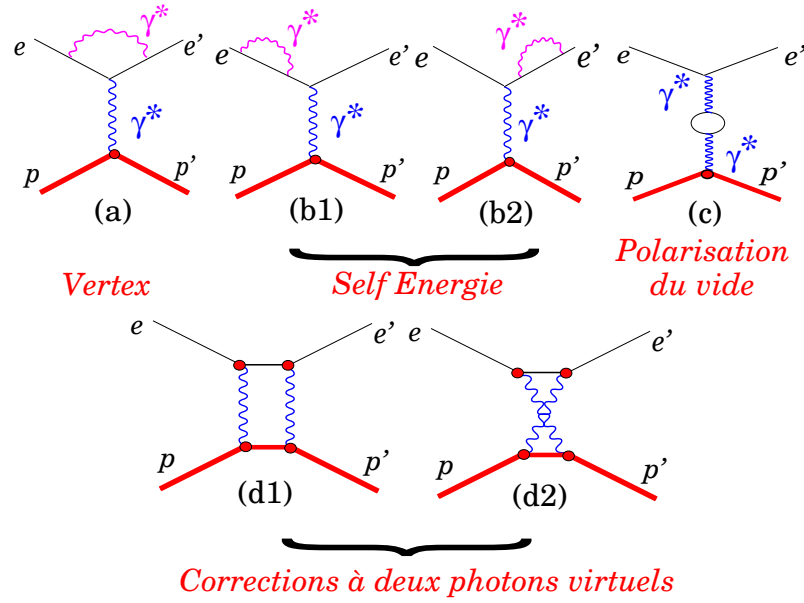
$$= P_2 + P_3 + P_4 + \dots \quad (2.8)$$

où :

- $(\mathcal{V}_1 \alpha + \mathcal{V}_2 \alpha^2 + \mathcal{V}_3 \alpha^3 + \dots)$: série perturbative en puissances de α décrivant l'amplitude de diffusion associée aux échanges de photons virtuels dans la réaction considérée.

1. On notera que le coefficient α^n a partout été extrait des amplitudes \mathcal{V}_n par souci de clarté.

Corrections Radiatives virtuelles



Corrections Radiatives réelles

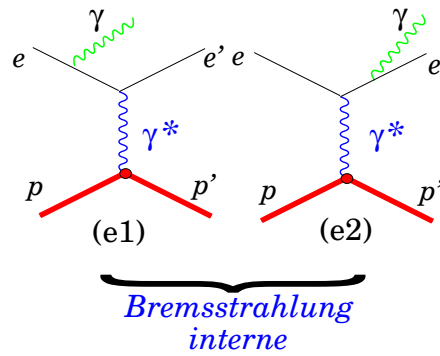


Figure 2.3 - Graphes à prendre en compte pour le calcul des corrections radiatives internes à la diffusion élastique $p(e, e')p'$. Ces graphes interviennent au niveau du terme d'ordre α^3 du développement de la section efficace.

- $\mathcal{V}_1 \alpha$ est le terme d'ordre le plus bas en α de la série perturbative décrivant l'amplitude de diffusion. Ce terme correspond à l'approximation de Born,
- $\mathcal{V}_2 \alpha^2$ est la contribution de l'ensemble des graphes d'échanges de photons virtuels d'ordre α^2 au niveau de l'amplitude de diffusion. Ces graphes d'ordre supérieur à l'amplitude de Born contribuent aux corrections radiatives. Ils correspondent aux graphes a, b1, b2, c, d1 et d2, représentés sur la figure (2.3),
- $\mathcal{V}_3 \alpha^3$ est la contribution de l'ensemble des graphes d'échanges de photons virtuels d'ordre α^3 au niveau de l'amplitude de diffusion (émission-absorption de 3 photons virtuels),
- etc...

On signale que $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots)$ comportent une intégrale sur l'espace-temps associé au photon virtuel échangé qu'on ne peut pas détecter de part leur nature.

Au niveau de la section efficace, P_2 , d'ordre α^2 , représente l'ordre en α le plus bas et correspond à l'approximation de Born. Pour le calcul des corrections radiatives à la réaction de diffusion élastique considérée, on se limite au terme d'ordre immédiatement supérieur à P_2 dans le développement de la section efficace, soit P_3 d'ordre α^3 . Ainsi, tous les termes du développement de la section efficace d'ordre supérieur à α^3 sont négligés : P_4, \dots

Emission de photons réels :

Lorsqu'une particule chargée passe au voisinage d'un noyau ou d'une autre particule chargée, elle subit une accélération qui se traduit par l'émission de photons réels. On appelle ce processus Bremsstrahlung (rayonnement de freinage) ou Bethe-Heitler selon que l'énergie des photons réels émis est respectivement inférieure ou supérieure à la résolution en énergie expérimentale ΔE lié à l'appareillage. Dans la suite, on qualifie de *mous* les photons d'énergie inférieure à ΔE qui ne peuvent, par conséquent, pas être discriminés. (Les photons d'énergie supérieure à ΔE , dits *durs*, sont identifiés par l'expérience). La probabilité d'émettre un photon réel par des particules chargées relativistes varie comme $\ln(Q^2/M^2)$ (M : masse au repos de la particule émettrice). A Q fixé $\geq 50\text{MeV}/c$, ceci implique que ce processus est dominant lorsque des électrons sont mis en jeu [44]. Pour notre expérience, $0.3(\text{GeV}/c)^2 \leq Q^2 \leq 1(\text{GeV}/c)^2$, on négligera donc ce processus pour des particules plus lourdes que des électrons telles que des muons ou des protons.

Les graphes qui contribuent aux corrections radiatives réelles sont ceux où un photon réel supplémentaire de très basse énergie (photon mou) est émis par le bras leptonique. En adoptant les mêmes conventions d'écriture que précédemment, la densité de probabilité correspondant à l'émission supplémentaire d'un seul photon mou, d'impulsion \vec{l} , s'écrit :

$$\tilde{P} = \int |\tilde{\mathcal{B}}_1 \alpha \sqrt{\alpha} + \tilde{\mathcal{B}}_2 \alpha^2 \sqrt{\alpha} + \dots|^2 d^3 \vec{l} \quad (2.9)$$

$$= \underbrace{\int |\tilde{\mathcal{B}}_1|^2 d^3 \vec{l} \alpha^3}_{\tilde{P}_3} + \underbrace{\int d^3 \vec{l} 2 \mathcal{R}e(\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{\mathcal{B}}_2) \alpha^4}_{\tilde{P}_4} + \dots \quad (2.10)$$

$$= \tilde{P}_3 + \tilde{P}_4 + \dots \quad (2.11)$$

avec :

- $(\tilde{\mathcal{B}}_1 \alpha \sqrt{\alpha} + \tilde{\mathcal{B}}_2 \alpha^2 \sqrt{\alpha} + \dots)$: série perturbative en puissances de α décrivant l'amplitude de diffusion associée à l'émission d'un photon réel supplémentaire dans la réaction étudiée.
- $\tilde{\mathcal{B}}_1 \alpha \sqrt{\alpha}$: l'amplitude de diffusion correspondant aux graphes e1 et e2, d'ordre $\alpha \sqrt{\alpha}$, illustrés sur la figure (2.3),
- $\tilde{\mathcal{B}}_3 \alpha^2 \sqrt{\alpha}$: la contribution au niveau de l'amplitude de diffusion de tous les graphes d'ordre $\alpha^2 \sqrt{\alpha}$: graphes a, b1, b2, c, d1 et d2 de la figure (2.3) combinés avec l'émission d'un photon réel (20 graphes à considérer !),
- etc...

Lorsqu'on traite les graphes avec émission de photon(s) réel(s), on doit procéder à une intégration sur tout l'espace de phase ouvert au(x) photon(s) mous.

Dans l'expression de la section efficace \tilde{P} (2.10), le terme \tilde{P}_3 d'ordre α^3 est le terme d'ordre le plus bas en α . Le terme \tilde{P}_4 , immédiatement supérieur à \tilde{P}_3 , est, lui, d'ordre α^4 . Sachant qu'au niveau de la section efficace de diffusion élastique, le terme d'ordre le plus bas est en α^2 , nous ne retiendrons que les graphes d'émission de photons réels conduisant à une section efficace en α^3 . On rappelle par ailleurs que la contribution de ces graphes ne peut être ajoutée qu'au niveau de la section efficace et non pas au niveau de l'amplitude de diffusion comme c'est le cas pour les graphes d'échanges de photons virtuels. Pour le calcul des corrections radiatives, on négligera tous les termes d'ordre supérieur à α^3 dans (2.10) ainsi que tous les graphes où plus d'un photon réel est émis puisque ceux-ci sont d'ordre au moins égal à α^4 .

Développement de la section efficace de diffusion élastique :

Expérimentalement, seule la probabilité totale obtenue par addition des diverses probabilités est observable. En regroupant les termes de même ordre, issus des échanges de photons virtuels d'une part et de l'émission d'un photon réel supplémentaire d'autre part, on écrit la probabilité totale sous la forme d'une série perturbative :

$$P_{Totale} = \underbrace{|\mathcal{V}_1|^2 \alpha^2}_{P_{T_2}} + \underbrace{2\mathcal{R}e(\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2^*) \alpha^3 + \int |\tilde{\mathcal{B}}_1|^2 \alpha^3 d^3 \vec{l}}_{P_{T_3}} + \dots \quad (2.12)$$

Dans l'expression (2.12), le premier terme de la série, P_{T_2} , est la section efficace de diffusion élastique dans l'approximation de Born. P_{T_3} , le terme d'ordre immédiatement supérieur en puissance de α permet d'évaluer les effets radiatifs au premier ordre. $2\mathcal{R}e(\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2^*) \alpha^3$ représente la contribution des effets radiatifs virtuels tandis que $\int |\tilde{\mathcal{B}}_1|^2 \alpha^3 d^3 \vec{l}$ représente celle des effets radiatifs réels.

En 1949, J. Schwinger [59] a calculé les corrections radiatives à la section efficace de diffusion élastique d'un électron par un potentiel Coulombien ponctuel. Il écrit la section efficace σ_{eff} sous la forme :

$$\sigma_{eff} = \sigma_0(1 + \delta) \quad (2.13)$$

où δ est appelée correction radiative. Dans (2.13), δ est une quantité algébrique négative. On rappelle que σ_{eff} désigne la section efficace expérimentale relative à une cible d'épaisseur nulle ne contenant que le noyau diffuseur. σ_0 correspond à la section efficace expérimentale corrigée des effets radiatifs. σ_0 est donc comparable à la section efficace théorique correspondant à l'ordre le plus bas en α .

La relation (2.13) nécessite que \mathcal{V}_1 ne figure pas explicitement dans l'écriture de δ . Il faut donc s'arranger pour factoriser l'amplitude correspondant à l'approximation de Born, \mathcal{V}_1 , dans les expressions de \mathcal{V}_2 et \mathcal{B}_1 . Les approximations nécessaires à ces factorisations sont discutées dans le rapport de C. de Calan, H. Navelet et J. Picard [57]. En accord avec [57], on écrira finalement la probabilité totale P_{Totale} sous la forme :

$$P_{Totale} = |\mathcal{V}_1|^2 \alpha^2 (1 + \delta) = |\mathcal{V}_1|^2 \alpha^2 (1 + \delta_{Virtuels} + \delta_{Réels}) \quad (2.14)$$

$\delta_{Virtuels}$ étant la contribution des effets radiatifs virtuels et $\delta_{Réels}$ la contribution des effets radiatifs réels. Nous verrons que, prises séparément, $\delta_{Virtuels}$ et $\delta_{Réels}$ sont des quantités divergentes mais que leur somme, $\delta_{Virtuels} + \delta_{Réels}$, est finie.

2.3.2 Corrections radiatives internes réelles

En négligeant les radiations issues du proton, les corrections radiatives réelles à la diffusion élastique électron-proton au premier ordre sont représentées par les graphes e1 et e2 de la figure (2.4). Ces graphes illustrent le rayonnement de l'électron incident ou diffusé. Ce processus de perte d'énergie de l'électron participant à la diffusion est appelé Bremsstrahlung interne. Puisqu'il y a perte d'énergie, les cinématiques seront modifiées tout comme dans le cas du Bremsstrahlung externe.

Nous avons vu précédemment que les graphes e1 et e2 de la figure (2.4) contribuaient à l'ordre α^3 au niveau de la section efficace et qu'ils doivent, de ce fait, être pris en compte pour le calcul au premier ordre des corrections radiatives à la diffusion élastique électron-proton. Nous nous proposons maintenant d'exprimer la section efficace totale relative à ces graphes pour ensuite en déduire son comportement en fonction de l'énergie $|\vec{l}| = \bar{l}$ du photon réel émis. Nous nous intéressons exclusivement à l'émission de photons mous dont l'énergie est inférieure à une certaine coupure expérimentale en énergie que nous notons ΔE_{cut} . A la fin de ce chapitre, nous verrons comment déterminer expérimentalement cette coupure qui est nécessairement très inférieure aux autres énergies mises en jeu dans la réaction mais forcément supérieure à la résolution en énergie de l'appareillage.

Dans l'annexe C, page 249, on montre que la section efficace de Bremsstrahlung interne indicée (Bi) s'écrit :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{Bi} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{Born} e^2 \int_0^{\bar{l} < \Delta E_{mous}} \frac{d\bar{l}}{(2\pi)^3 2\bar{l}} \cdot \int d\Omega_l \left[\frac{2(p_e \cdot p'_e)}{(E_e - \vec{p}_e \cdot \hat{l})(E'_e - \vec{p}'_e \cdot \hat{l})} - \frac{m_e^2}{(E_e - \vec{p}_e \cdot \hat{l})^2} - \frac{m_e^2}{(E'_e - \vec{p}'_e \cdot \hat{l})^2} \right] \quad (2.15)$$

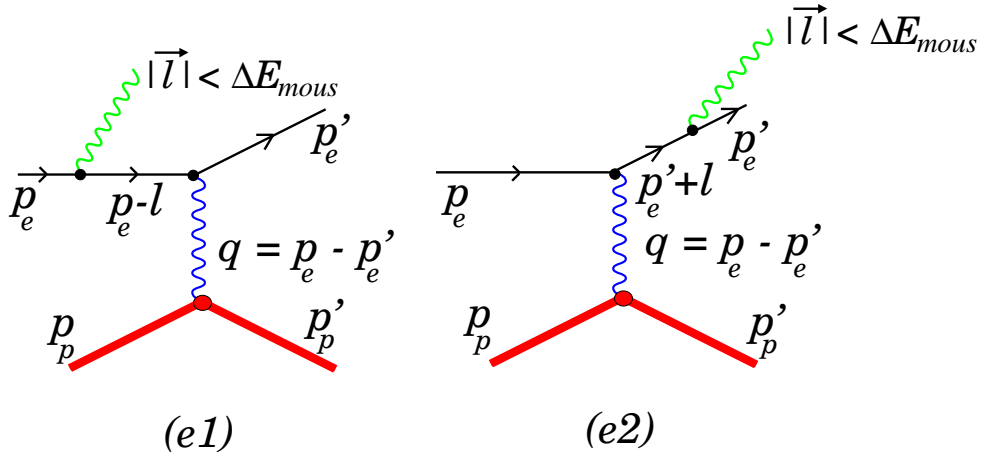


Figure 2.4 - Graphes à prendre en compte pour le calcul des corrections radiatives réelles au premier ordre. On associe au photon réel émis un quadrimoment l . On ne considère que les photons rayonnés d'énergie $|\vec{l}|$ inférieure à une certaine énergie caractéristique ΔE_{cut} qui représente la coupure expérimentale relative à la réaction considérée. La valeur de cette coupure est très inférieure aux autres énergies mises en jeu lors de la réaction et légèrement supérieure à la résolution en énergie de l'appareillage.

avec $\hat{l} = \vec{l}/\bar{l}$. On définit ΔE_{mous} comme l'énergie maximum des photons réels qu'on ne peut pas discriminer expérimentalement. Par hypothèse, ΔE_{mous} est très inférieure aux autres énergies mises en jeu dans le processus, cf. page 250. La correction associée à l'émission de photons d'énergie supérieure à ΔE_{mous} s'obtient en intégrant la formule exacte (C.1, p. 249) correspondant aux graphes (e1) et (e2) entre ΔE_{mous} et la coupure expérimentale en énergie adoptée, cf. page 81. Pour la diffusion élastique en particulier, on a l'habitude d'identifier ΔE_{mous} avec la coupure expérimentale en énergie notée ΔE_{cut} . Traitant ici du cas de la diffusion élastique uniquement, nous choisissons dans la suite de remplacer ΔE_{mous} par ΔE_{cut} . On peut d'ores et déjà signaler que dans le cas de la diffusion Compton virtuelle (cf. chap. 3), il nous faudra réintroduire ΔE_{mous} car l'énergie du photon réel attendu dans l'état final (33, ...111.5 MeV) est du même ordre de grandeur que la coupure en énergie (20, 30 MeV).

Remarques :

- La section efficace de Born se met en facteur dans la section efficace de Bremsstrahlung interne.
- Si l'on omet la deuxième intégrale de (2.15), on retrouve que la probabilité d'émettre un photon réel, dans une direction \hat{l} fixée, est inversement proportionnelle à son énergie \bar{l} (spectre typique du Bremsstrahlung en $1/\bar{l}$).
- On constate que $\int^{|\vec{l}| < \Delta E_{cut}} \frac{d|\vec{l}|}{|\vec{l}|}$ présente une divergence logarithmique pour $\bar{l} \rightarrow 0$. Cette divergence est naturellement qualifiée d'infrarouge et correspond à une probabilité infinie d'émettre des photons d'énergie "nulle".

- Les photons réels d'énergie supérieure à $\Delta E_{m_{ous}}$ sont expérimentalement détectés. Cette émission de photons contribue à ce que l'on appelle la queue radiative. Cette queue radiative apparaît dans la distribution en énergie des électrons diffusés sous la forme d'une extension du spectre à basse énergie. Nous reviendrons sur cette queue radiative dans le paragraphe 2.4.2, page 81.
- Dans le terme entre crochets de l'équation (2.15), on remarque que lorsque le photon est émis dans la direction de l'électron incident (resp. diffusé), les dénominateurs du type $(E_e - \vec{p}_e \cdot \hat{l}) \xrightarrow{\cos \theta_{e\gamma} \rightarrow 0} \sqrt{|\vec{p}_e|^2 + m_e^2} - |\vec{p}_e| \xrightarrow{|\vec{p}_e|^2 \gg m_e^2} \frac{m_e^2}{2|\vec{p}_e|^2}$. Ceci conduit à une section efficace maximum pour $\theta_{e\gamma} = 0$ (resp. $\theta_{e'\gamma} = 0$). L'approximation du "peaking" angulaire consiste à considérer que tous les photons réels sont émis soit dans la direction de l'électron incident, soit dans celle de l'électron diffusé.
- Par ailleurs, on constate que seul le numérateur du premier terme entre crochets de (2.15), $p_e \cdot p'_e$, fait intervenir l'angle de diffusion de l'électron $\theta_{ee'}$ dans le laboratoire. En développant ce terme, on obtient $p_e \cdot p'_e = 2|\vec{p}_e||\vec{p}_{e'}| \sin^2 \frac{\theta_{ee'}}{2} = Q^2/2$ où Q^2 est l'opposé du quadri-moment de transfert carré de la réaction.

La divergence logarithmique infrarouge constatée dans l'équation (2.15) met un point d'arrêt provisoire à notre calcul des corrections radiatives réelles. En effet, la poursuite de ce calcul nécessite l'usage d'une régularisation. Avant de procéder au traitement de cette divergence (cf. paragraphe 2.3.4.1), nous allons étudier le comportement des processus mis en jeu dans les corrections radiatives virtuelles.

2.3.3 Corrections radiatives internes virtuelles

A la différence des effets radiatifs réels, les échanges de photons virtuels ne modifient pas la cinématique mais modifient la probabilité de diffusion. Contrairement au Bremsstrahlung interne, l'état final est le même que celui de la diffusion élastique dans l'approximation de Born. Les effets radiatifs virtuels interviendront donc au niveau de la somme cohérente des amplitudes. (Dans la suite, afin d'alléger l'écriture, nous avons omis le terme imaginaire $(+i\varepsilon)$ des propagateurs, cf. annexe B page 243.)

En premier lieu, nous évaluerons l'influence des graphes à deux photons virtuels échangés entre les bras hadronique et leptonique sur la section efficace dans l'approximation de Born. Nous montrerons que, dans les conditions cinématiques que nous utilisons, la correction apportée par ces deux graphes peut être négligée.

Ensuite, nous établirons l'amplitude relative à chacun des 4 graphes associés aux effets radiatifs virtuels illustrés sur la figure [2.3] : les deux graphes de self-énergie, le graphe de correction de vertex et celui de polarisation du vide. Dans toute la suite, nous utiliserons la jauge de Feynman qui a l'avantage de simplifier les expressions sans modifier le résultat final qui est par nature invariant de jauge. Nous étudierons le comportement asymptotique de ces amplitudes en fonction de l'énergie du photon virtuel afin de mettre en évidence les divergences éventuelles dans la limite infrarouge et ultraviolette. L'amplitude associée à chaque diagramme s'obtient en intégrant sur tout l'espace-temps l'amplitude élémentaire correspondant à une valeur de l , quadri-moment du photon virtuel échangé.

2.3.3.1 Seconde approximation de Born

L'échange de deux photons virtuels entre les bras hadronique et leptonique, deux premiers graphes illustrés sur la figure [2.5], est qualifié de seconde approximation de Born.

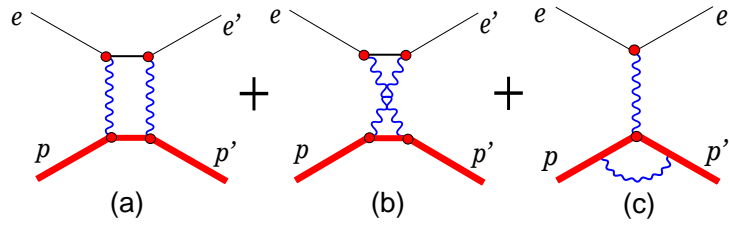


Figure 2.5 - Graphes (a) et (b) : graphes mettant en jeu l'échange de deux photons virtuels entre les bras hadronique et leptonique. Graphe (c) : correction de vertex sur le proton.

Si nous considérons le rayonnement du proton, nous serions forcés de prendre en compte les trois graphes représentés sur la figure [2.5] car ils permettent précisément la compensation des termes divergents infrarouges provenant des graphes de rayonnement du proton et de l'interférence entre ces derniers et les graphes de rayonnement de l'électron. Ceci a été démontré par Y.S. Tsai en 1961 [62]. Pour ce faire, il a utilisé la technique qui consiste à n'évaluer que les termes les plus divergents infrarouges de chacun des graphes considérés. Dans les années 50, W.A. McKinley, H. Feshbach [63] et R.H. Dalitz [64] ont calculé la contribution finie de la seconde approximation de Born sur la section efficace élastique dans la limite d'un potentiel Coulombien statique infiniment lourd ($M \rightarrow \infty$). Dans ces conditions, l'émission de photons mous par le proton est inhibée et la divergence infrarouge disparaît tant au niveau des graphes de rayonnement par le proton qu'au niveau des graphes représentés sur la figure [2.5]. Quantifions cette correction en appliquant le résultat² dérivé par W.A. McKinley et H. Feshbach. On adopte la notation $\sigma_{eff} = \sigma_0(1 + \delta_{2\gamma*})$ où $\delta_{2\gamma*}$ représente la correction due au seul processus d'échange de deux photons virtuels. σ_0 est la section efficace dans l'approximation de Born.

$$\delta_{2\gamma*} = \pi \alpha \beta \sin \frac{\theta_{lab}^{ee'}}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta_{lab}^{ee'}}{2} \right) \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta_{lab}^{ee'}}{2} \right)^{-1} \quad (2.16)$$

avec :

- β : vitesse de l'électron relative à celle de la lumière ; $\beta = \sqrt{E_e^2 - m_e^2} / E_e$,
- $\theta_{lab}^{ee'}$: angle de diffusion des électrons dans le laboratoire,
- $\alpha = 1/137$,

Application numérique :

Considérons deux cinématiques typiques associées à l'expérience de diffusion Compton virtuelle :

- une des cinématiques réalisée à Mayence : $E_e = 855 MeV$, $\theta_{ee'} \simeq 50^\circ$,

² On note que R.G. Newton [65] ainsi que A.I. Akhiezer et B.V. Berestetskii [61](p.716) ont mené plus tard le même calcul.

- une cinématique qui sera réalisée à Jefferson Lab : $E_e = 4\text{GeV}$, $\theta_{ee'} \simeq 15^\circ$.

Dans les deux cas considérés, $\beta=1$. La correction $\delta_{2\gamma^*}$ n'est alors fonction que de l'angle $\theta_{\text{lab}}^{ee'}$ entre les électrons incidents et les électrons diffusés. La figure (2.6) représente la contribution à la section efficace à l'ordre le plus bas de l'échange de deux photons virtuels entre les bras hadronique et leptonique en fonction de l'angle de diffusion des électrons.

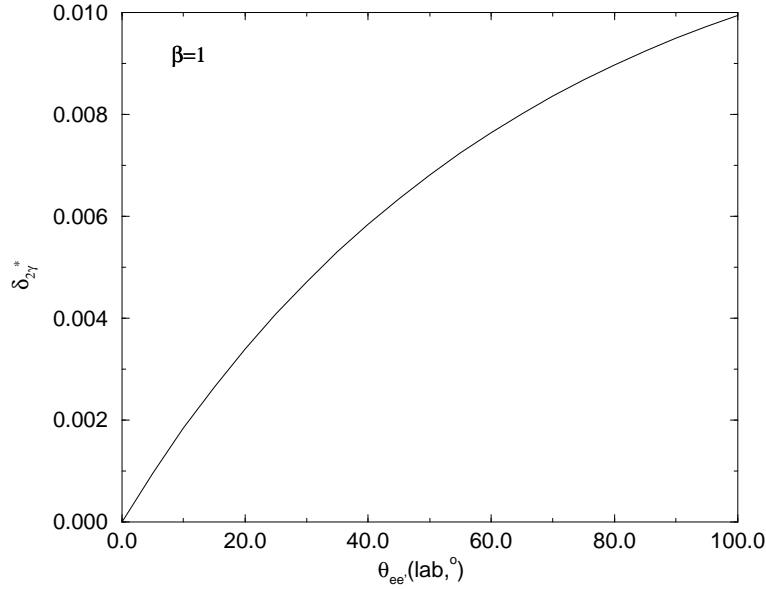


Figure 2.6 - Pour $\beta = 1$, contribution de l'échange de 2 photons virtuels entre les bras hadronique et leptonique en fonction de l'angle de diffusion de l'électron dans le laboratoire. Cette contribution est relative à la section efficace de diffusion élastique dans l'approximation de Born.

Sur la figure (2.6), on constate que dans le cas de la cinématique de Mayence pour laquelle $\theta_{\text{lab}}^{ee'} \simeq 50^\circ$, $\delta_{2\gamma^*}$ est de l'ordre de 0.7%. A Jefferson Lab où $\theta_{\text{lab}}^{ee'} \simeq 15^\circ$, $\delta_{2\gamma^*}$ est voisine de 0.3%.

Etant donné la petitesse de cette correction relativement aux autres, très supérieures au pour-cent pour les mêmes cinématiques, nous négligerons dorénavant les graphes mettant en jeu l'échange de deux photons virtuels entre les bras hadronique et leptonique dans le cas de la diffusion élastique et de la diffusion Compton virtuelle. Nous tiendrons compte de l'effet de cette correction $\delta_{2\gamma^*}$ dans l'évaluation des erreurs systématiques liées au calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle. On trouvera de nombreuses autres références concernant la seconde approximation de Born dans l'article de L.C. Maximon [54]. Par ailleurs, Y. S. Tsai [62] indique que la contribution du troisième graphe de la figure [2.5] est d'environ 0.5% pour $E_e=10\text{GeV}$ et $E_e'=500\text{MeV}$.

2.3.3.2 Correction de “Self-Energie” de l’électron

Un diagramme de self-énergie est caractérisé par l’émission-absorption d’un photon virtuel par une ligne de fermion tel que représenté sur la figure [2.7]. On retrouve ce type de diagramme au niveau des graphes (b1) et (b2) de la figure [2.3].

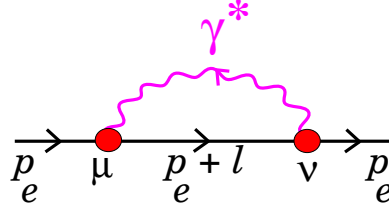


Figure 2.7 - Diagramme de self-énergie d’un électron de quadri-moment p_e . Le photon virtuel de quadri-moment l est émis au vertex μ puis absorbé au vertex ν .

Le couplage d’un photon virtuel sur une ligne, externe ou interne, de particule chargée a pour effet de modifier le propagateur libre associé à cette particule.

Dans le cas particulier du calcul des corrections radiatives au premier ordre à la diffusion élastique, le photon virtuel supplémentaire peut seulement être émis et réabsorbé par des lignes externes. Dans d’autres processus, telle la diffusion Compton virtuelle, nous serons amenés, pour calculer les corrections radiatives au premier ordre, à considérer des graphes dans lesquels l’une voire les deux extrémités du photon virtuel est (sont) liée(s) à une ligne interne.

On note $\sum(p)$ la contribution à l’amplitude totale induite par le couplage d’un photon virtuel supplémentaire sur la ligne d’un électron de quadri-moment p . En adoptant les notations de la figure [2.7], l’application des règles de Feynman (cf. annexe B) permet d’obtenir la contribution $\sum(p_e)$ associée au diagramme de self-énergie. Dans la jauge de Feynman, on obtient :

$$-i \sum(p_e) = -e^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{\not{p}_e + \not{l} + m_e}{[l^2][(p_e + l)^2 - m_e^2]} \gamma_\mu \quad (2.17)$$

Le moyen de juger rapidement le comportement des intégrales dans les limites infrarouge et ultraviolette est de compter les puissances de l contenues dans l’intégrand pour chacune des limites. En adoptant cette procédure pour (2.17), on constate que l’intégrale est :

- convergente dans la limite infrarouge ($\propto \int \frac{d^4 l}{l^3}$) dans le cas où $p_e^2 \neq m_e^2$ et ($\propto \int \frac{d^4 l}{l^2}$) dans le cas où $p_e^2 = m_e^2$,
- linéairement divergente dans la limite ultraviolette ($\propto \frac{d^4 l}{l^3}$).

Les diagrammes de self-énergie présentent une divergence ultraviolette ne nous permettant pas de poursuivre le calcul de cette correction. La prochaine étape consiste à isoler les termes divergents ultraviolets par régularisation dimensionnelle (cf. 2.3.4.1). Nous verrons ultérieurement (paragraphe 2.3.4.2) que la correction associée au couplage d'un photon virtuel sur une ligne externe (cas de la diffusion élastique) est nulle si on utilise des spineurs renormalisés. Seuls les photons virtuels ayant au moins l'une de leurs extrémités liée à une ligne interne donneront lieu à une correction non nulle.

2.3.3.3 Correction de polarisation du vide

En plus de la correction de self-énergie de l'électron, il faut tenir compte de la self-énergie du photon que l'on appelle également polarisation du vide. Cette correction se manifeste sous la forme d'une boucle fermée de fermions mettant en jeu une paire ($e^+ e^-$) issue du vide de QED telle que représentée sur la figure [2.8].

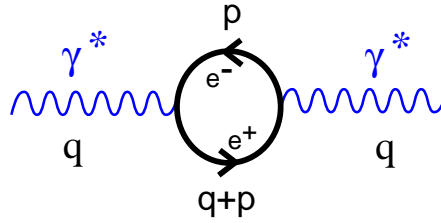


Figure 2.8 - *Diagramme de polarisation du vide ou self-énergie du photon. q et p sont les quadri-vecteurs associés respectivement au photon et au fermion.*

Cette boucle fermée de fermions peut s'insérer dans une ligne interne ou externe de photon.

Dans le cadre du calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique à l'ordre α^3 , la boucle s'insère dans une ligne interne : graphe (c) de la figure [2.3].

On note $\Pi_{\kappa\lambda}$ la contribution de la polarisation du vide. Cette contribution, fonction de q (quadri-moment du photon virtuel échangé), a pour effet de modifier le propagateur libre de ce photon $D_o^{\mu\nu} = -i g^{\mu\nu}/q^2$ (jauge de Feynman). On désigne par $D^{\mu\nu}$ le propagateur modifié que l'on écrit sous la forme :

$$D^{\mu\nu}(q) = D_o^{\mu\nu}(q) + D_o^{\mu\kappa}(q) \Pi_{\kappa\lambda}(q) D_o^{\lambda\nu}(q) \quad (2.18)$$

L'expression de $\Pi_{\kappa\lambda}$ s'obtient à partir des notations de la figure [2.8] et des règles de Feynman (cf. annexe B) :

$$-i \Pi_{\kappa\lambda} = (-1) e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\frac{\gamma_\kappa (\not{p} + m) \gamma_\lambda (\not{p} + \not{q} + m)}{[p^2 - m_e^2][(p+q)^2 - m_e^2]} \right) \quad (2.19)$$

Par convention (cf. [68], p. 287), dans le cas d'une boucle fermée de fermions, il apparaît un facteur (-1) .

En comptant les puissances de p dans (2.19), on constate que l'intégrale

– reste finie dans la limite infrarouge $\left(\propto \int \frac{d^4 p}{p^3} \right)$,

– diverge quadratiquement dans la limite ultraviolette ($\propto \int \frac{d^4 p}{p^2}$).

En nous appuyant sur l'invariance de jauge, nous allons montrer que la divergence ultraviolette est en fait logarithmique.

L'invariance de jauge impose :

$$q^\kappa \Pi_{\kappa\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_{\kappa\lambda} q^\lambda = 0 \quad (2.20)$$

Le tenseur $\Pi_{\kappa\lambda}$ est fonction de q et on peut l'écrire sous la forme :

$$\Pi_{\kappa\lambda} = C(Q^2) q_\kappa q_\lambda + B(Q^2) g_{\kappa\lambda} \quad (2.21)$$

où C et D sont des fonctions du carré du quadri-moment de transfert Q^2 . A partir de (2.20), on déduit directement que $C(Q^2) q^2 = -B(Q^2)$. Ceci nous permet de réécrire $\Pi_{\kappa\lambda}$ sous la forme :

$$\Pi_{\kappa\lambda} = C(Q^2) [q_\kappa q_\lambda - g_{\kappa\lambda} q^2] \quad (2.22)$$

En différenciant l'expression (2.22) par rapport à q_κ et à q_λ , on obtient :

$$C(Q^2) \propto \left. \frac{\partial^2 \Pi_{\kappa\lambda}}{\partial q_\kappa \partial q_\lambda} \right|_{q_\kappa, q_\lambda = 0} \quad (2.23)$$

A partir de l'équation (2.19), on déduit que $\frac{\partial^2 \Pi_{\kappa\lambda}}{\partial q_\kappa \partial q_\lambda}$ est en $\frac{d^4 p}{p^4}$ lorsque $p \rightarrow \infty$. $C(Q^2)$ présente donc une divergence logarithmique dans la limite ultraviolette.

Dorénavant, nous omettrons les termes en $q_\kappa q_\lambda$ puisque les courants sont conservés à chaque extrémité ($q_\kappa J^\kappa = 0$), cas du graphe (c) de la figure [2.3].

En combinant (2.22) et (2.18), le propagateur modifié $D^{\mu\nu}$ prend la forme :

$$D^{\mu\nu}(q) = D_o^{\mu\nu}(q) [1 + C(Q^2)] = \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} [1 + C(Q^2)] \quad (2.24)$$

Nous verrons ultérieurement qu'après isolement des termes divergents ultraviolets, il suffira d'une renormalisation de charge pour faire disparaître la divergence. Parmi tous les graphes de la figure [2.3], on soulignera que le graphe relatif à la polarisation du vide est le seul à être invariant de jauge par lui-même.

2.3.3.4 Correction de vertex

La partie de diagramme où un photon virtuel “enjambe” un vertex tel que représenté sur la figure [2.9] est appelée correction de vertex. Ne tenant compte que des effets radiatifs associés à l'électron, nous ne corrigerons que le vertex leptonique, cf. graphe (a1) de la figure [2.3] relative aux graphes à prendre en compte pour le calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique au premier ordre.

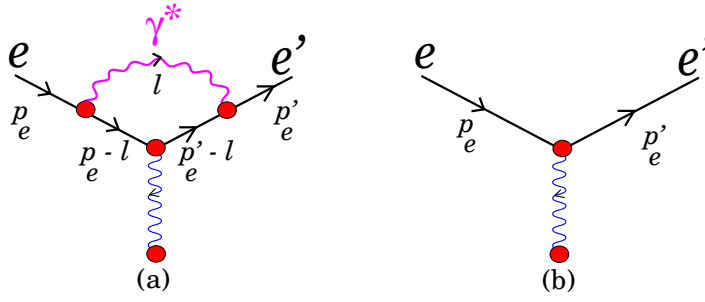


Figure 2.9 - (a): diagramme avec correction de vertex. (b): graphe sans correction de vertex.

La prise en compte de cette correction (cf. figure [2.9a]) sur un diagramme d'ordre immédiatement inférieur en puissance de α (cf. figure [2.9b]) s'obtient en remplaçant $ie\gamma^\beta$ par $ie\Gamma^\beta$:

$$ie\Gamma^\beta = ie\gamma^\beta + ie\Lambda^\beta \quad (2.25)$$

On note $\Lambda^\beta(p_e, p'_e)$ la correction de vertex fonction des quadri-moments p_e et p'_e des électrons incident et diffusé auxquels se couple le photon virtuel. En adoptant les conventions de la figure [2.9a] et en appliquant les règles de Feynman (cf. annexe B), on écrit $\Lambda^\beta(p_e, p'_e)$ sous la forme (choix de la jauge de Feynman):

$$\Lambda^\beta(p_e, p'_e) = -ie^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{(\not{p}'_e - \not{l} + m_e) \gamma^\beta (\not{p}_e - \not{l} + m_e)}{[l^2][l^2 - 2l p'_e][(l^2 - 2l p_e)]} \gamma_\mu \quad (2.26)$$

En comptant les puissances de l dans l'expression (2.26), on déduit le comportement asymptotique de l'intégrale \mathcal{I} sur l'espace-temps du photon virtuel:

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{(\not{p}'_e - \not{l} + m_e) \gamma^\beta (\not{p}_e - \not{l} + m_e)}{[l^2][l^2 - 2l p'_e][(l^2 - 2l p_e)]} \gamma_\mu \quad (2.27)$$

\mathcal{I} est :

- logarithmiquement divergente dans l'infrarouge car $\mathcal{I} \propto \frac{d^4 l}{l^4}$,
- logarithmiquement divergente dans l'ultraviolet car $\mathcal{I} \propto \frac{d^4 l}{l^4}$.

On est donc contraint, comme dans les cas précédents, à procéder à un traitement des divergences afin de pouvoir obtenir un résultat fini, cf. 2.3.4.

2.3.3.5 Récapitulatif des divergences

Il est temps de faire le bilan des divergences mises à jour dans les paragraphes précédents avant de procéder à leur traitement. Le tableau (2.10) ci-dessous synthétise le comportement des amplitudes de chacun des graphes dans les limites infrarouge et ultraviolette.

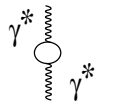
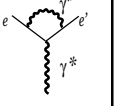
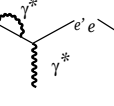
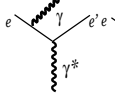
<i>Corrections virtuelles</i>				<i>Corrections réelles</i>
<i>Polarisation du vide</i>	<i>Vertex</i>	<i>Self-Energie</i>	<i>Bremsstrahlung</i>	
				
Limite infrarouge	Conv.	div. log.	Conv.	div. log.
Limite ultraviolette	div. log.	div. log.	div. lin.	

Figure 2.10 - *Récapitulatif des divergences pour chacun des types de graphes contribuant aux corrections radiatives internes à la diffusion élastique à l'ordre α^3 . Légende : conv(ergent), div(ergent), log(arithmiquement), lin(éairement).*

2.3.4 Traitement des divergences

Le traitement des divergences infrarouges et ultraviolettes est sans nul doute l'étape maîtresse de tout calcul de corrections radiatives puisqu'à l'issue de cette opération, nous serons capables d'exprimer en termes finis la correction induite par l'ensemble des graphes décrits précédemment. Les deux étapes principales constituant le processus d'élimination des divergences sont :

- la régularisation des intégrales,
- la renormalisation ou redéfinition des quantités nues définies en l'absence d'interaction dans le Lagrangien de QED.

On procédera ensuite au contrôle de l'élimination des termes divergents assurant l'extraction des termes finis constituant la correction radiative à l'ordre souhaité :

- les termes divergents ultraviolets sont compensés par des termes supplémentaires lors de la renormalisation,
- les termes divergents infrarouges s'éliminent au niveau de la section efficace par compensation des termes infinis infrarouges issus d'une part des effets radiatifs réels et d'autre part des effets radiatifs virtuels.

La régularisation désigne une méthode modifiant l'intégrale de telle sorte qu'elle devienne finie. Ceci implique généralement l'introduction de nouveaux paramètres qui gardent la trace du type de divergence ayant nécessité une régularisation. On dira qu'une méthode de régularisation permet d'isoler les termes divergents dans le but d'extraire les termes finis. Dans le cas d'intégrales divergentes dans la limite ultraviolette, on peut utiliser, entre autres méthodes, la régularisation mise au point par Pauli Villars en 1949 ([67], p.45) . Cette méthode encore appelée régularisation covariante consiste à introduire une coupure ultraviolette Λ d'une façon covariante ($\Lambda^2/(\Lambda^2 - l^2)$). La partie divergente de l'intégrale s'exprimera alors en fonction de la coupure tandis que la partie finie sera indépendante

de la coupure pour $\Lambda \rightarrow \infty$. Pour les divergences dans la limite infrarouge, une des méthodes largement utilisées dans le passé est celle qui consiste à donner une masse fictive λ au photon. Un des inconvénients majeurs de cette dernière méthode réside dans le fait que l'invariance de jauge est brisée lors des calculs. Néanmoins, l'invariance de jauge est rétablie après élimination du paramètre de régularisation λ . La méthode que nous avons choisie d'utiliser pour la diffusion Compton virtuelle et qui sera décrite ci-après dans le cadre de la diffusion élastique est la méthode de régularisation dimensionnelle développée dans les années 1970 [69] [70]. Entre autres avantages, un même traitement permet d'isoler les termes divergents infrarouges et les termes divergents ultraviolets. En outre, on souligne que cette méthode respecte l'invariance de jauge à chaque étape du calcul.

La renormalisation ultraviolette consiste à reconstituer le Lagrangien de QED, fonction de quantités définies en l'absence d'interaction, à partir du Lagrangien physique s'exprimant en fonction des quantités mesurables : masse, charge de l'électron... Ceci va nous amener à introduire des termes supplémentaires qui vont compenser exactement les termes divergents ultraviolets dérivés à partir du Lagrangien physique décrivant l'interaction à un certain ordre. La prescription de renormalisation a été appliquée à l'électrodynamique quantique à partir des années 50 et a conduit à de nombreux succès. En particulier, on citera le très bon accord théorie/expérience pour le moment magnétique de l'électron et le Lamb shift de l'atome d'hydrogène.

Ensuite, nous vérifierons que les termes divergents infrarouges restants donnent bien lieu à la compensation infrarouge escomptée au niveau de la section efficace [73]. Nous rappellerons alors le processus d'élimination des divergences avant de finalement exprimer la correction radiative à la diffusion élastique en fonction de la coupure expérimentale ΔE_{cut} .

2.3.4.1 La régularisation dimensionnelle

Historiquement, cette méthode a été développée ([67], p. 52, [72]) à partir du constat que les diagrammes de Feynman ne divergeraient plus dans la limite ultraviolette si la dimension de l'espace-temps, sur lequel on intègre le quadri-moment du photon virtuel, était inférieure à 4. Dans cet esprit, la régularisation dimensionnelle revient à se placer dans un espace-temps fictif de dimension D dans lequel l'intégrale converge et où il est possible de l'évaluer. On souligne que cette méthode, encore appelée régularisation par continuation de l'espace, a l'avantage d'être invariante de jauge. Suite au succès de cette méthode pour l'isolement des termes divergents ultraviolets, on l'a également utilisée [66] [74] pour la régularisation des intégrales divergentes infrarouges. Il est entendu que dans ce dernier cas, l'intégrale convergera si la dimension de l'espace-temps devient supérieure à celle de l'espace-temps habituel. On définit D par :

$$D = 4 - 2\varepsilon \quad (2.28)$$

de telle sorte que lorsque $D \rightarrow 4$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

La régularisation dimensionnelle isole séparément les termes divergents infrarouges des termes divergents ultraviolets. A partir des remarques du paragraphe précédent, on définit

ε_{IR} et ε_{UV} tels que :

$$\varepsilon_{IR} = 2 - D/2 < 0 \quad (D > 4) \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_{UV} = 2 - D/2 > 0 \quad (D < 4) \quad (2.30)$$

Après intégration, lorsque $D \rightarrow 4$, les termes divergents apparaissent sous la forme de pôles en ε_{IR} ou ε_{UV} selon que leur origine est une divergence ultraviolette ou une divergence infrarouge. Afin d'illustrer les principales étapes de la régularisation dimensionnelle, nous allons prendre l'exemple du traitement de l'intégrale de la correction de vertex qui présente à la fois une divergence dans la limite ultraviolette et dans la limite infrarouge. Ainsi, à partir de ce canevas, on sera en mesure d'appliquer cette technique pour la diffusion Compton virtuelle. Pour les corrections de polarisation du vide, de self-énergie et de Bremsstrahlung interne, nous nous limiterons à donner leur expression régularisée dont la dérivation se trouve dans de nombreux ouvrages.

Application à la correction de vertex :

Nous soulignons que la méthode que nous présentons ici est celle sur laquelle nous nous sommes appuyés pour régulariser les intégrales des amplitudes des diagrammes relatifs à la diffusion Compton virtuelle.

Notre but est de régulariser l'intégrale \mathcal{I} contenue dans la correction de vertex Λ^β , cf. page 59. On rappelle que la jauge choisie est la jauge de Feynman.

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{(\not{p}'_e - \not{l} + m_e) \gamma^\beta (\not{p}_e - \not{l} + m_e)}{[l^2][l^2 - 2l \cdot p'_e][(l^2 - 2l \cdot p_e)]} \gamma_\mu \quad (2.31)$$

• Dans un premier temps, nous allons décomposer \mathcal{I} de façon à séparer les termes divergents ultraviolets, les termes divergents infrarouges et les termes ne donnant pas lieu à des divergences. Pour ce faire, développons le numérateur N^β de \mathcal{I} :

$$\begin{aligned} N^\beta = & \gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu - \gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \not{l} \gamma_\mu + m_e \gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \gamma_\mu \\ & - \gamma^\mu \not{l} \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu + \gamma^\mu \not{l} \gamma^\beta \not{l} \gamma_\mu - m_e \gamma^\mu \not{l} \gamma^\beta \gamma_\mu \\ & + m_e \gamma^\mu \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu - m_e \gamma^\mu \gamma^\beta \not{l} \gamma_\mu + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma_\mu \end{aligned} \quad (2.32)$$

En rassemblant les termes en fonction des puissances de l et après simplification (équation de Dirac), on obtient :

$$\begin{aligned} N^\beta = & \{ \gamma^\mu \not{l} \gamma^\beta \not{l} \gamma_\mu \} \\ & + \{ \gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu + m_e \gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \gamma_\mu \\ & + m_e \gamma^\mu \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma_\mu \} \\ & + \left\{ -2(p_{e\mu} \gamma^\mu \not{l} \gamma^\beta + p_e'^\mu \gamma^\beta \not{l} \gamma_\mu) \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

- Etant donné que pour $l \rightarrow 0$, le dénominateur de (2.31) se comporte comme l^6 , les termes divergents ultraviolets sont repérés, au numérateur, par une puissance en l supérieure ou égale à 2. Seul donc le premier terme de (2.33), entre accolades,

contribuera à une divergence ultraviolette. On notera \mathcal{I}_{UV} l'intégrale correspondante en D-dimensions :

$$\mathcal{I}_{UV} = \mu^{4-D} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu \not{l} \gamma^\beta \not{l} \gamma_\mu}{[l^2] [l^2 - 2l \cdot p'_e] [(l^2 - 2l \cdot p_e)]} \quad (2.34)$$

Le passage en D-dimensions nécessite l'introduction d'un facteur μ jouant le rôle d'échelle de masse. Ceci garantit que la constante de couplage reste sans dimension lorsque $D \neq 4$.

- Dans la limite infrarouge, le dénominateur se comporte cette fois en l^4 . Les termes divergents infrarouges sont donc les termes du numérateur indépendants de l , second terme entre accolades de (2.33). On notera \mathcal{I}_{IR} l'intégrale correspondante en D-dimensions :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{IR} = & \mu^{4-D} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[l^2] [l^2 - 2l \cdot p'_e] [(l^2 - 2l \cdot p_e)]} \{ \\ & [\gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu + m_e \gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \gamma_\mu \\ & + m_e \gamma^\mu \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma_\mu] \} \end{aligned} \quad (2.35)$$

- Les autres termes de (2.33) sont proportionnels à l mais n'induisent pas de divergence. Ces termes sont finis et il ne sera pas nécessaire de passer en D-dimensions pour évaluer \mathcal{I}_F :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_F = & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2] [l^2 - 2l \cdot p'_e] [(l^2 - 2l \cdot p_e)]} \{ \\ & \gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \not{l} \gamma_\mu + \gamma^\mu \not{l} \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu \\ & + m_e \gamma^\mu \not{l} \gamma^\beta \gamma_\mu + m_e \gamma^\mu \gamma^\beta \not{l} \gamma_\mu \} \end{aligned} \quad (2.36)$$

A l'issue de cette première étape, \mathcal{I} est décomposée en trois intégrales dont deux, \mathcal{I}_{IR} et \mathcal{I}_{UV} , sont à évaluer en D-dimensions car elles sont divergentes.

- La seconde étape va nous conduire à transformer les intégrands de ces trois intégrales dans le but d'utiliser les formules d'intégration en D-dimensions (cf. annexe B page 246) de la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{[K^2]^r}{[K^2 - C]^m} \quad (2.37)$$

avec $C = R^2$. (Pour \mathcal{I}_F , $D = 4$ mais nous lui appliquons la même transformation car ceci simplifie notablement les calculs.)

Dans ce but, nous allons utiliser la paramétrisation de Feynman. Celle-ci nous permet de réduire le nombre de facteurs au dénominateur jusqu'à n'en avoir plus qu'un. Dans le cas où un dénominateur se présente, par exemple, sous la forme d'un produit de deux facteurs, la paramétrisation de Feynman s'écrit :

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (2.38)$$

On constate que cette transformation fait apparaître une intégrale sur un nouveau paramètre x appelé paramètre de Feynman. Le nombre de paramètres de Feynman à introduire est fonction du nombre initial de facteurs au dénominateur. n facteurs au dénominateur induiront $(n - 1)$ paramètres de Feynman, cf. annexe B page 245. Ce nombre de paramètres de Feynman peut être déterminé à partir de l'observation du graphe puisque le nombre de facteurs au dénominateur est directement relié au nombre de lignes internes (propagateurs).

Chacune des 3 intégrales \mathcal{I} présente 3 facteurs au dénominateur. Une fois paramétrisées, il apparaît 2 paramètres de Feynman : x et y . Après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{[l^2][l^2 - 2l \cdot p'_e][(l^2 - 2l \cdot p_e)]} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \frac{1}{[l^2 - 2ly(xq + p_e)]^3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \frac{1}{Den^3} \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec $q = p_e - p'_e$.

Pour que “ Den ” soit de la forme $[K^2 - R^2]$ (2.37), on doit procéder au changement de variable suivant :

$$K = l - R \quad (2.40)$$

avec $R = y(xq + p_e)$.

C se met alors sous la forme :

$$C = y^2 [m_e^2 - q^2 x (1 - x)] \quad (2.41)$$

Après changement de variable, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{UV} = & 2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{1}{[K^2 - C]^3} \{ \\ & \gamma^\mu \not{K} \gamma^\beta \not{K} \gamma_\mu \\ & + y [\gamma^\mu \not{K} \gamma^\beta (x \not{q} + \not{p}_e) \gamma_\mu + \gamma^\mu (x \not{q} + \not{p}_e) \gamma^\beta \not{K} \gamma_\mu] \\ & + y^2 \gamma^\mu (x \not{q} + \not{p}_e) \gamma^\beta (x \not{q} + \not{p}_e) \gamma_\mu \} \end{aligned} \quad (2.42)$$

On notera que le terme entre crochets n'est constitué que de termes ne comportant qu'une seule puissance de \not{K} . Le dernier terme de (2.42) est fonction de x et y mais indépendant de K . Il ne présente aucune divergence et sera noté T_{y^2} . Dans la pratique, on transforme T_{y^2} à l'aide de l'équation de Dirac, de l'identité de Gordon et des formules d'algèbre en D-dimensions afin d'obtenir une expression fonction de $m_e^2 \gamma^\beta$, $\gamma^\beta q^2$, q^β et $\sigma^{\beta\nu} q_\nu$.

$$T_{y^2} = y^2 (a_1 x^2 + a_2 x + a_3)$$

$$\text{avec } a_1, a_2, a_3 = f(m_e^2 \gamma^\beta, \gamma^\beta q^2, q^\beta, i m_e \sigma^{\beta\nu} q_\nu)$$

$$\mathcal{I}_{IR} = 2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{1}{[K^2 - C]^3} [T_{y^0}] \quad (2.43)$$

T_{y^0} est indépendant de K , x et y . Il ne dépend que de variables cinématiques fixées et s'obtient par réarrangement des termes de (2.35) entre crochets de la même manière que T_{y^2} .

$$T_{y^0} = f(m_e^2 \gamma^\beta, \gamma^\beta q^2, q^\beta, im_e \sigma^{\beta\nu} q_\nu)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_F = & -2 \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[K^2 - C]^3} \{ \\ & [\gamma^\mu \not{p}'_e \gamma^\beta \not{K} \gamma_\mu + \gamma^\mu \not{K} \gamma^\beta \not{p}_e \gamma_\mu \\ & + m_e \gamma^\mu \not{K} \gamma^\beta \gamma_\mu + m_e \gamma^\mu \gamma^\beta \not{K} \gamma_\mu] + T_{y^1} \} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$T_{y^1} = y(c_1 x + c_2)$$

$$\text{avec } c_1, c_2 = f(m_e^2 \gamma^\beta, \gamma^\beta q^2, q^\beta, im_e \sigma^{\beta\nu} q_\nu)$$

• A l'aide des formules d'intégration en D-dimensions rappelées dans l'annexe B page 246, il est maintenant possible d'effectuer l'intégrale sur K . On notera que les expressions (2.42) et (2.44) s'allègent notablement puisque tout produit impair de K s'annule, cf. annexe B, page 246. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{UV} = & \frac{i(4\pi\mu^2)^{\varepsilon_{UV}}}{(4\pi)^2} \frac{(2-D)^2}{2} \Gamma(2-D/2) \gamma^\beta \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y^{D-3}}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{2-D/2}} \\ & - \frac{i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y^{D-3} (a_1 x^2 + a_2 x + a_3)}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{3-D/2}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

On indice la variable ε en fonction de la nature de la divergence. Cet étiquetage permet d'isoler les termes divergents ultraviolets et infrarouges.

$$\mathcal{I}_{IR} = \frac{-i(4\pi\mu^2)^{\varepsilon_{IR}}}{(4\pi)^2} \Gamma(3-D/2) \int_0^1 dx T_{y^0} \int_0^1 dy \frac{y^{D-5}}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{3-D/2}} \quad (2.46)$$

$$\mathcal{I}_F = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (c_1 x + c_2) \int_0^1 dy \frac{y^{D-4}}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{3-D/2}} \quad (2.47)$$

• Nous allons maintenant pouvoir intégrer sur les paramètres de Feynman. Commençons par y :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{UV} = & \frac{i(4\pi\mu^2)^{\varepsilon_{UV}}}{(4\pi)^2} \frac{(D-2)}{2} \Gamma(2-D/2) \gamma^\beta \int_0^1 dx \frac{1}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{2-D/2}} \\ & - \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{D-2} \int_0^1 dx \frac{(a_1 x^2 + a_2 x + a_3)}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{3-D/2}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\mathcal{I}_{IR} = \frac{-i(4\pi\mu^2)^{\varepsilon_{IR}}}{(4\pi)^2} \Gamma(3-D/2) \frac{T_{y^0}}{D-4} \int_0^1 dx \frac{1}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{3-D/2}} \quad (2.49)$$

$$\mathcal{I}_F = \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{D-3} \int_0^1 dx (c_1 x + c_2) \frac{1}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{3-D/2}} \quad (2.50)$$

Dans la pratique, on vérifiera que la somme des termes en q^β issus des trois intégrales est nulle. Ceci nous assure que le calcul est invariant de jauge et simplifie les expressions. Par ailleurs, l'emploi de la propriété (2.51) élimine tous les x au numérateur de (2.48) et (2.49).

$$\int_0^1 dx (1-2x) f(x[1-x]) \equiv 0 \quad (2.51)$$

Finalement, les intégrands sont de la forme :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \frac{1}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^\varepsilon} \\ & \int_0^1 dx \frac{1}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{1+\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Les résultats de ces intégrales sont données en annexe B, page 246.

- Remplaçons maintenant D par son expression en fonction de ε . Nous ferons ainsi apparaître les termes divergents ultraviolets, repérés par ε_{UV} , et les termes divergents infrarouges étiquetés ε_{IR} . Pour ce faire, nous nous appuyons sur les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{(D-2)}{2} & \equiv 1 - \varepsilon \\ \Gamma(2-D/2) & \equiv \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\gamma_E \simeq 0.577 : \text{constante d'Euler}) \\ \Gamma(3-D/2) & \equiv \Gamma(1+\varepsilon) \equiv 1 - \gamma_E \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \frac{1}{D-4} & \equiv -\frac{1}{2\varepsilon_{IR}} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Prenons le cas de \mathcal{I}_{UV} . Après intégration sur x , un développement limité du premier terme de (2.48) conduit à :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2}\right)^{\varepsilon_{UV}} \frac{(D-2)}{2} \Gamma(2-D/2) & \equiv \left[1 + \varepsilon_{UV} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2}\right)\right] [1 - \varepsilon_{UV}] \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E\right] \\ & \equiv \frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon_{UV}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Pour \mathcal{I}_{IR} , le premier terme de (2.49) devient :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2}\right)^{\varepsilon_{IR}} \Gamma(3-D/2) \frac{1}{D-4} & \equiv \left[1 + \varepsilon_{IR} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2}\right)\right] [1 - \varepsilon_{IR} \gamma_E] \left[-\frac{1}{2\varepsilon_{IR}}\right] \\ & \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon_{IR}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

• Finalement, après simplification et regroupement de tous les termes issus de \mathcal{I}_{UV} , \mathcal{I}_{IR} et \mathcal{I}_F , la contribution de la correction de vertex Λ^β s'écrit :

$$\begin{aligned} \Lambda^\beta = & \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\beta \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right) \right] \right. \\ & + \left(\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right) \frac{v^2+1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \\ & + \frac{v^2+1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \left(\frac{v^2-1}{4v^2} \right) + \frac{v^2+1}{v} \ln(v+1v-1) \\ & + \frac{v^2+1}{v} \left[Sp \left(\frac{v+1}{2v} \right) - Sp \left(\frac{v-1}{2v} \right) \right] \\ & \left. - i \frac{\sigma^{\beta\nu}}{2m_e} q_\nu \left[\frac{v^2-1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.56)$$

avec $v^2 = 1 + 4(m_e^2/Q^2)$ et Sp la fonction de Spence définie dans l'annexe B page 247.

On constate que (2.56) peut se mettre sous la forme :

$$\Lambda^\beta = \gamma^\beta F(Q^2) - \frac{i\sigma^{\beta\nu}}{2m_e} q_\nu G(Q^2) \quad (2.57)$$

Finalement, un photon virtuel qui “enjambe” un vertex le modifie en réarrangeant le courant électromagnétique. $F(Q^2)$ est relatif au mouvement des charges électriques tandis que $G(Q^2)$ se rapporte à la magnétisation. Il est intéressant de noter que la forme de l'expression (2.56) est similaire à celle de (B.3) décrivant le vertex hadronique à l'aide des facteurs de forme F_1 et F_2 élastiques du proton.

$$\begin{aligned} F(Q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} & \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \right. \\ & + \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \frac{v^2+1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \\ & + \frac{v^2+1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \ln \left(\frac{v^2-1}{4v^2} \right) + \frac{v^2+1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \\ & \left. + \frac{v^2+1}{v} \left[Sp \left(\frac{v+1}{2v} \right) - Sp \left(\frac{v-1}{2v} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$G(Q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{v^2-1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \quad (2.59)$$

Au terme de ce paragraphe, l'amplitude liée au diagramme de correction de vertex est régularisée. Elle comporte des termes divergents ultraviolets (en ε_{UV}) et des termes divergents infrarouges (en ε_{IR}) nettement isolés.

On peut dire que la méthode de régularisation dimensionnelle est facilement applicable et que la difficulté réside plutôt dans les calculs algébriques où une erreur est si vite

arrivée si on n'y prend pas garde!

Afin d'extraire les termes divergents ultraviolets de (2.58), nous procéderons à une renormalisation du vertex, cf. 2.3.4.2 page 70.

Avant de voir comment disparaissent les termes divergents ultraviolets, exprimons les autres types de corrections en fonction de ε_{UV} ou ε_{IR} .

Autres corrections :

La régularisation dimensionnelle des intégrales divergentes apparaissant dans les diagrammes de self-énergie, de polarisation du vide et de Bremsstrahlung interne conduit aux expressions suivantes :

• Correction de self-énergie de l'électron :

$$\begin{aligned} \sum (p_e) = & -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] (\not{p}_e - 4m_e) \right. \\ & + \not{p}_e \left[1 + \frac{1}{\tilde{p}_e^2} + \frac{1 + \tilde{p}_e^2}{(\tilde{p}_e^2)^2} (1 - \tilde{p}_e^2) \ln(1 - \tilde{p}_e^2) \right] \\ & \left. + 2m_e \left[-3 - \frac{2}{\tilde{p}_e^2} (1 - \tilde{p}_e^2) \ln(1 - \tilde{p}_e^2) \right] \right\} \quad (2.60) \end{aligned}$$

avec $\tilde{p}_e = p_e/m_e$.

• Correction de polarisation du vide :

$$\begin{aligned} C(Q^2) = & -\frac{4}{3} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right. \\ & \left. - \left(v^2 - \frac{8}{3} \right) + \frac{v}{2} (v^2 - 3) \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \quad (2.61) \end{aligned}$$

avec $v^2 = 1 + 4(m_e^2/Q^2)$.

Les expressions (2.60) et (2.61), relatives respectivement aux corrections de self-énergie et de polarisation du vide après régularisation, mettent clairement en évidence les termes divergents ultraviolets. Nous verrons que ces termes divergents ultraviolets disparaissent après renormalisation, cf. paragraphe 2.3.4.2.

• Bremsstrahlung interne :

Lorsque ΔE_{cut} est très inférieure aux énergies mises en jeu (cas de la diffusion élas-

tique), on rappelle que la section efficace de Bremsstrahlung interne s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{Born} \times (-e^2) \int_0^{\Delta E_{cut}} \frac{d^3 \vec{l}}{(2\pi)^3 2\vec{l}} \left[\frac{(p'_e)_\mu}{p'_e \cdot \vec{l}} - \frac{(p_e)_\mu}{p_e \cdot \vec{l}} \right] \cdot \left[\frac{(p'_e)^\mu}{p'_e \cdot \vec{l}} - \frac{(p_e)^\mu}{p_e \cdot \vec{l}} \right] \quad (2.62)$$

Le traitement du Bremsstrahlung interne diffère quelque peu des trois cas précédents puisqu'il faut intégrer cette fois sur l'espace de phase ouvert au photon réel. Ceci donne lieu à une intégration sur un espace à (D-2) dimensions tel que pour $D \rightarrow 4$, on recouvre l'espace physique à 3 dimensions. On note que cette intégrale est dépendante du référentiel choisi via la limite d'intégration ΔE_{cut} . Nous adoptons le référentiel du laboratoire. Comme pour les corrections virtuelles, nous introduisons l'échelle de masse μ qui assure que la borne supérieure de l'intervalle d'intégration est sans dimension. Après réarrangement et mise en facteur de \vec{l} au dénominateur, l'intégrale à évaluer se met sous la forme :

$$\mathcal{I}_{Bi} = e^2 \int_0^{\vec{l} < (\Delta E_{cut} / \mu)} \frac{d\vec{l}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{\vec{l}^{D-2}}{2\vec{l}^3} \times \int_{D-2} d\Omega_l \left\{ \frac{2(p_e \cdot p'_e)}{(E_e - \vec{p}_e \cdot \hat{l})(E'_e - \vec{p}'_e \cdot \hat{l})} - \frac{m^2}{(E_e - \vec{p}_e \cdot \hat{l})^2} - \frac{m^2}{(E'_e - \vec{p}'_e \cdot \hat{l})^2} \right\} \quad (2.63)$$

avec $\hat{l} = \vec{l} / \vec{l}$.

L'intégration sur \vec{l} et sur l'angle solide de (2.63), particulièrement laborieuse a été réalisée par M. Vanderheaghen. Les différentes étapes de calcul nécessaires à cette intégration sont détaillées dans la référence [81]. Nous nous contenterons ici de donner le résultat obtenu dans la limite $Q^2 \gg m_e^2$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_e}\right)_{Bi} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_e}\right)_{Born} \left\{ \frac{\alpha}{\pi} \left[-\frac{1}{\varepsilon_{IR}} + \gamma_E - \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] + \delta_R \right\} \quad (2.64)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_R = \frac{\alpha}{\pi} & \left\{ \ln \left(\frac{4(\Delta E_{cut})^2}{m_e^2} \right) \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \right. \\ & - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta_e^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta_e'^2}{4} \right) \\ & - \frac{1}{4} \ln^2(1 - \beta_e^2) - \frac{1}{4} \ln^2(1 - \beta_e'^2) + \ln 2 \ln(1 - \beta_e^2) + \ln 2 \ln(1 - \beta_e'^2) \\ & \left. + 2 \left(\ln^2 \left(\sin \frac{\theta_e}{2} \right) - \ln^2 4 \right) - \frac{\pi^2}{6} - Sp \left(\sin^2 \frac{\theta_e}{2} \right) \right\} \quad (2.65) \end{aligned}$$

et θ_e l'angle de diffusion de l'électron, β_e et β'_e les vitesses respectives de l'électron incident et diffusé :

$$\beta_e = \left| \frac{p_e}{E_e} \right| \quad \beta'_e = \left| \frac{p'_e}{E'_e} \right|$$

Remarques :

- On souligne que nous n'avons fait ici aucune hypothèse sur l'angle d'émission du photon réel, nous n'avons pas employé l'approximation du “peaking angulaire”.
- On retrouve le résultat qu'avaient obtenu De Calan, Navelet et Picard [76].
- Le terme dépendant de la coupure en énergie expérimentale est en accord avec le résultat obtenu par Mo et Tsai [47].
- Les termes indépendants de ΔE_{cut} dans (2.65) proviennent de l'intégration sur l'angle solide. Une partie de ces termes étaient négligés dans [47]. Dans notre cas, comme β_e et β'_e sont très proches de 1, les termes en (\ln^2) sont particulièrement importants et ne doivent surtout pas être négligés.

2.3.4.2 Renormalisation

Jusqu'à présent, toutes les expressions que nous avons dérivées sont fonctions des paramètres physiques mesurables tels que la masse et la charge de l'électron ainsi que les champs. Nous savons par ailleurs que le Lagrangien de toute théorie des champs telle que QED s'exprime en fonction de quantités définies en l'absence d'interaction. Dans ce paragraphe, nous allons chercher à réexprimer le Lagrangien de QED en fonction des paramètres physiques mesurables. Cette opération nécessite la détermination de termes supplémentaires appelés contre-termes. Ces contre-termes sont infinis dans la limite ultraviolette et vont compenser les termes divergents ultraviolets contenus dans les expressions trouvées précédemment.

Soit \mathcal{L}_N le Lagrangien de QED (conventions de Bjorken et Drell) :

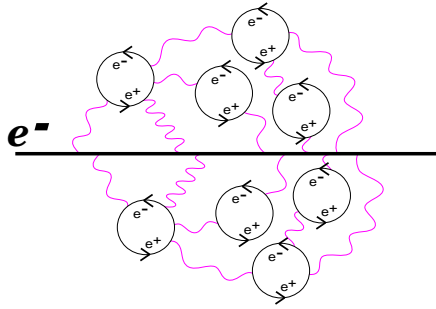
$$\mathcal{L}_N = \bar{\Psi}_N (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{e_N}) \Psi_N - \frac{1}{4} F_{N\mu\nu} F_N^{\mu\nu} - e_N \bar{\Psi}_N \gamma^\mu \Psi_N A_{N\mu} \quad (2.66)$$

L'indice N désigne les quantités définies en l'absence d'interaction. $F_N^{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique :

$$F_N^{\mu\nu} = \partial^\mu A_N^\nu - \partial^\nu A_N^\mu \quad (2.67)$$

Nous comprenons que les quantités qui interviennent dans \mathcal{L}_N ne soient pas mesurables puisque l'interaction avec le vide, entre autres, est inévitable. De plus, elles sont infinies.

Si on prend le cas de la charge de l'électron par exemple, nous savons que la charge que nous mesurons expérimentalement ($e^2 = 4\pi\alpha$) tient compte des fluctuations perpétuelles avec le vide qui entourent l'électron, cf. figure (2.11). à réduire indéfiniment la distance qui nous sépare de l'électron, nous pénétrerions le nuage de positrons et verrions augmenter la charge indéfiniment. Au plus près de la charge, on peut considérer que l'électron apparaît comme libre, dépourvu d'interaction. On comprend alors que les quantités “nues” sont liées à une observation à très courte distance, dans l'ultraviolet, tandis que la valeur

Figure 2.11 - *Ecrantage de la charge de l'électron.*

de la charge que l'on admet relève des propriétés à grande distance de l'électron ($Q^2 = 0$).

Relier le Lagrangien de QED au Lagrangien “physique” implique de relier les quantités “nues”, définies en l'absence d'interaction, aux quantités physiques mesurables. Soit Z_2 , Z_3 , Z_m et Z_e les coefficients de renormalisation ([77], page 472) :

$$\begin{aligned}
 \Psi_N &= \sqrt{Z_2} \Psi \\
 A_N^\mu &= \sqrt{Z_3} A^\mu \\
 m_{e_N} &= Z_m m_e \\
 e_N &= Z_e e
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Ψ , m_e et e représentent respectivement la fonction d'onde, la masse et la charge de l'électron. A^μ est le champ associé au photon.

Les quantités “nues” étant infinies et les quantités physiques étant finies, les coefficients de renormalisation sont infinis dans la limite ultraviolette.

En remplaçant dans (2.66) les quantités “nues” par leur expression en fonction des quantités physiques, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_N = & \underbrace{\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu}_{\mathcal{L}_R} \\
 & + \underbrace{(Z_2 - 1) \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - (Z_2 Z_m - 1) \bar{\Psi} m_e \Psi - (Z_3 - 1) \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (Z_1 - 1) e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu}_{\mathcal{L}_{CT}}
 \end{aligned}$$

On définit $Z_1 = Z_e Z_2 Z_3^{1/2}$, le coefficient de renormalisation du vertex.

On écrit :

$$\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT} \tag{2.69}$$

\mathcal{L}_R , Lagrangien Renormalisé, présente la même forme que \mathcal{L}_N mais s'exprime en fonction des quantités mesurables finies. C'est le Lagrangien “physique” correspondant à un

certain ordre.

\mathcal{L}_{CT} , appelé Lagrangien “contre-terme”, rassemble tous les termes nécessaires à l’égalité (2.69). Ces termes, appelés contre-termes, sont définis au même ordre que le Lagrangien “physique”.

Tous les calculs que nous avons menés jusqu’au paragraphe 2.3.4.1 utilisaient le Lagrangien “physique”. Pour reconstituer le Lagrangien de QED, nous allons donc devoir déterminer les coefficients de renormalisation et ensuite ajouter ces contre-termes aux expressions obtenues au paragraphe 2.3.4.1. On souligne que ces coefficients de renormalisation se déterminent ordre par ordre à partir des diagrammes de correction de vertex, de self-énergie et de polarisation du vide.

Renormalisation du vertex :

Il s’agit ici de renormaliser le couplage électron-photon au premier ordre en α . Le contre-terme correspondant est $(Z_1 - 1)$. Au premier ordre, on décrira alors le vertex à l’aide des trois diagrammes représentés sur la figure [2.12]. Le troisième diagramme illustre la contribution du contre-terme.

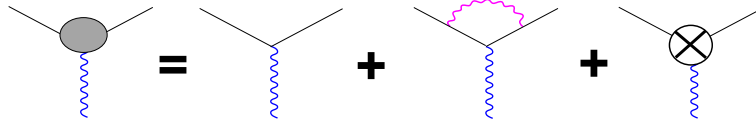


Figure 2.12 - Description du vertex à l'ordre 1

Soit $\tilde{\Gamma}^\beta$ l’expression renormalisée du vertex leptonique :

$$\begin{aligned} ie\tilde{\Gamma}^\beta &= ie\gamma^\beta + ie\Lambda^\beta + ie(Z_1 - 1)\gamma^\beta \\ &= ie\gamma^\beta [F(Q^2) + Z_1] + \frac{e}{2m_e} \sigma^{\beta\nu} q_\nu G(Q^2) \end{aligned} \quad (2.70)$$

La détermination de Z_1 est contrainte par le fait qu’à $Q^2 = 0$, on doit retrouver la charge physique e en facteur devant γ^β . Z_1 doit ainsi satisfaire :

$$Z_1 = 1 - F(Q^2 = 0) \quad (2.71)$$

A partir de l’expression de $F(Q^2)$, équation (2.58) page 67, Z_1 s’écrit :

$$\begin{aligned} Z_1 = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} &\left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \right. \\ &\left. + 2 \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] + 4 \right\} + \mathcal{O}(e^4) \end{aligned} \quad (2.72)$$

En réinjectant Z_1 dans (2.70), on obtient :

$$\begin{aligned} ie\tilde{\Gamma}^\beta &= ie\gamma^\beta [1 + F(Q^2) - F(Q^2 = 0)] + \frac{e}{2m_e} \sigma^{\beta\nu} q_\nu G(Q^2) \\ &= ie\gamma^\beta [1 + \delta_V] + \frac{e}{2m_e} \sigma^{\beta\nu} q_\nu G(Q^2) \end{aligned} \quad (2.73)$$

On appelle δ_V la correction de vertex au premier ordre :

$$\begin{aligned}
\delta_V &= F(Q^2) - F(Q^2 = 0) \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \cdot \left[\frac{v^2 + 1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) - 1 \right] \right. \\
&\quad + \frac{v^2 + 1}{4v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \ln \left(\frac{v^2 - 1}{4v^2} \right) + \frac{2v^2 + 1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) - 2 \\
&\quad \left. + \frac{v^2 + 1}{2v} \left[Sp \left(\frac{v+1}{2v} \right) - Sp \left(\frac{v-1}{2v} \right) \right] \right\} \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Dans la limite $Q^2 \gg m_e^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta_V &= \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \cdot \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{3}{2} \ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 2 \right] + \left[-\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) + \frac{\pi^2}{6} \right] \right\} \quad (2.75)
\end{aligned}$$

On constate que les termes divergents ultraviolets ont bien été compensés par l'adjonction du contre-termes ($Z_1 - 1$). A ce stade, seul un terme divergent infrarouge subsiste.

Le deuxième terme de (2.73), $\frac{e}{2m_e} \sigma^{\beta\nu} q_\nu G(Q^2)$, caractérise l'interaction magnétique entre le photon et l'électron. A $Q^2 = 0$, on retrouve l'anomalie au moment magnétique de l'électron obtenue par Schwinger en 1948 :

$$G(Q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (2.76)$$

Le moment magnétique de l'électron s'écrit alors :

$$\mu_e = \frac{e}{2m_e} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) = \frac{g}{2} \mu_{Bohr} \simeq 1.00115965 \mu_{Bohr} \quad (2.77)$$

avec g le facteur de Landé.

Ce deuxième terme est négligeable dans la limite $Q^2 \gg m_e^2$ et il sera omis dans la suite. On souligne que c'est grâce à cette dernière approximation que nous serons en mesure de factoriser les termes infinis infrarouges devant l'amplitude du processus à l'ordre le plus bas, cf. 2.3.4.3.

Renormalisation du diagramme de polarisation du vide :

Le contre-termes associé à la propagation d'un photon est ($Z_3 - 1$). Au premier ordre, on représentera graphiquement la propagation d'un photon de quadri-moment q par les 3 diagrammes de la figure [2.13]. Le troisième représentant la contribution du contre-termes.

On définit $\tilde{D}^{\mu\nu}(q)$ le propagateur renormalisé du photon :

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2} \left[1 + \tilde{C}(q^2) \right] \quad (2.78)$$

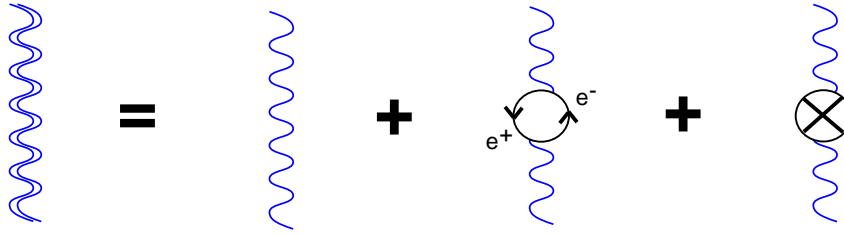


Figure 2.13 - Représentation de la propagation d'un photon à l'ordre 1

$\tilde{C}(q^2)$ s'écrit en fonction du contre-terme ($Z_3 - 1$) :

$$\tilde{C}(q^2) = C(q^2) - (Z_3 - 1) \quad (2.79)$$

avec $C(q^2)$ défini à partir de l'invariance de jauge et dont l'expression est donnée par l'équation (2.22) page 58. On rappelle que nous négligeons les termes en $q^\mu q^\nu$ car ils s'annulent par conservation du courant à chaque extrémité du photon virtuel.

Le coefficient de renormalisation Z_3 est déterminé en imposant que le propagateur du photon renormalisé présente un pôle pour $q^2 = 0$ avec un résidu 1. Z_3 doit ainsi satisfaire :

$$Z_3 = 1 + C(q^2 = 0) \quad (2.80)$$

En remplaçant Z_3 par son expression (2.80) dans (2.79), on a :

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2} [1 + (C(q^2) - C(q^2 = 0))] \quad (2.81)$$

A partir de (2.81) et (2.78), on déduit :

$$\tilde{C}(q^2) = C(q^2) - C(q^2 = 0) \quad (2.82)$$

Au regard de (2.81), la correction radiative δ_{PV} à la propagation d'un photon s'écrit :

$$\delta_{PV} = \tilde{C}(Q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \left[\left(v^2 - \frac{8}{3} \right) - \frac{v}{2} (v^2 - 3) \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \quad (2.83)$$

Dans la limite $Q^2 \gg m_e^2$, on obtient :

$$\delta_{PV} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \left[-\frac{5}{3} + \ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) \right] \quad (2.84)$$

Le terme divergent ultraviolet a été compensé par l'ajout du contre-terme associé. Cette correction ne présente plus aucun terme infini. Nous retrouverons cette expression (2.83) au niveau du résultat final, cf. page 79.

Renormalisation à la propagation de l'électron :

La renormalisation à la propagation d'un électron implique une renormalisation de la fonction d'onde et une renormalisation de masse. Les contre-termes correspondants issus

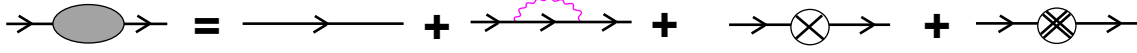


Figure 2.14 - Propagation d'un électron à l'ordre 1

de (2.69) font intervenir les coefficients de renormalisation Z_2 et Z_m qu'il reste à déterminer à partir de (2.60). Au premier ordre, la propagation renormalisée d'un électron est décrite par les diagrammes de la figure [2.14].

L'expression renormalisée de la correction de self-énergie de l'électron, $\tilde{\Sigma}(p_e)$, s'obtient à partir de (2.69) et s'exprime en fonction des coefficients de renormalisation Z_2 et Z_m sous la forme :

$$\tilde{\Sigma}(p_e) = \Sigma(p_e) - (Z_2 - 1) \not{p}_e + (Z_2 Z_m - 1) m_e \quad (2.85)$$

Soit $S(p_e)$ le propagateur généralisé de l'électron incluant l'émission-absorption d'un photon virtuel et $\tilde{S}(p_e)$ son expression renormalisée en fonction de $\tilde{\Sigma}(p_e)$:

$$\tilde{S}(p_e) = S_o(p_e) + S_o(p_e) \tilde{\Sigma}(p_e) S(p_e) \quad (2.86)$$

avec $S_o(p_e) = \frac{\not{p}_e + m_e}{p_e^2 - m_e^2}$ le propagateur libre de l'électron engendré par la self-énergie.

Après développement de $\Sigma(p_e)$ autour de $\not{p}_e = m_e$ dans (2.85), on remplace $\tilde{\Sigma}(p_e)$ dans (2.86). L'inverse du propagateur généralisé renormalisé s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{-1} = & (\not{p}_e - m_e) \left[1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}_e} \Big|_{\not{p}_e = m_e} + (Z_2 - 1) \right] \\ & + [(1 - Z_m) Z_2 m_e - \Sigma(\not{p}_e = m_e)] + \mathcal{O}((\not{p}_e - m_e)^2) \end{aligned} \quad (2.87)$$

En imposant que \tilde{S} présente un pôle pour $\not{p}_e = m_e$ avec un résidu 1, on détermine Z_2 et Z_m :

$$Z_2 = 1 + \frac{d\Sigma}{d\not{p}_e} \Big|_{\not{p}_e = m_e} \quad (2.88)$$

$$(1 - Z_m) Z_2 m_e = \Sigma(\not{p}_e = m_e) \quad (2.89)$$

A partir de (2.60), on obtient :

$$\begin{aligned} Z_2 = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} & \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \right. \\ & \left. + 2 \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] + 4 \right\} + \mathcal{O}(e^4) \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} Z_2 Z_m = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} & \left\{ 4 \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \right. \\ & \left. + 2 \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] + 8 \right\} + \mathcal{O}(e^4) \end{aligned} \quad (2.91)$$

En comparant les expressions de Z_2 et Z_1 (équation 2.72 page 72), on constate qu'elles sont identiques. Cette propriété, connue sous le nom d'identité de Ward, découle de l'invariance de jauge de l'électrodynamique quantique, cf. [67].

En réinjectant Z_2 et Z_1 dans (2.85), on obtient l'expression renormalisée de la correction de self-énergie :

$$\begin{aligned} \delta_{SE} &= \tilde{\Sigma}(p_e) \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \not{p}_e \left[-2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right) - 3 + \frac{1}{\tilde{p}_e^2} + \frac{(1 - \tilde{p}_e^4)}{\tilde{p}_e^4} \ln(1 - \tilde{p}_e^2) \right] \right. \\ &\quad \left. - m_e \left[-2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right) - 2 + \frac{4}{\tilde{p}_e^2} (1 - \tilde{p}_e^2) \ln(1 - \tilde{p}_e^2) \right] \right\} \quad (2.92) \end{aligned}$$

- On constate que l'adjonction des contre-termes a eu pour effet l'élimination des termes divergents ultraviolets mais a induit une divergence infrarouge jusque là absente,
- Pour $\not{p}_e = m_e$, cas d'un couplage du photon virtuel à une ligne externe exclusivement, $\tilde{p} = 1$ et $\tilde{\Sigma}(p_e) = 0$.

On conclut donc que les graphes (b1) et (b2) de la figure [2.3] page 48 n'engendreront aucune correction si on utilise les spineurs renormalisés. En revanche, nous verrons que pour la diffusion Compton virtuelle, les corrections liées au couplage d'un photon virtuel supplémentaire ne donneront pas toutes lieu à une contribution nulle. En effet, le calcul des corrections radiatives au premier ordre à la diffusion Compton virtuelle nécessite la prise en compte de graphes où le photon virtuel est lié par l'une au moins de ses extrémités à une ligne interne, cf. figure [3.2].

Remarques :

Le but de ce paragraphe était d'appliquer la procédure de renormalisation. Pour en savoir plus sur la théorie de la renormalisation, on se reportera aux ouvrages traitant du sujet tels que ([67], page 30), ([56], page 318), [77], pages 31 et 472), ([78], page 280), ([67], page 30), ([79], page 203) et bien d'autres. Dans [67], deux méthodes de renormalisation sont présentées. Celle que nous utilisons est la plus récente appelée BPHZ (Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmerman).

Après renormalisation, la correction due à la polarisation du vide ne contient plus de terme divergent et la correction de vertex ne comporte plus qu'un terme divergent infrarouge. Or, nous nous souvenons que les effets radiatifs réels induisent également un terme divergent dans la limite infrarouge. La prochaine et dernière étape de ce calcul de correction radiative va consister à mettre en évidence la compensation des termes divergents infrarouges au niveau de la section efficace.

2.3.4.3 Compensation infrarouge

La première référence faisant état du "miracle" de la compensation des termes divergents infrarouges, issus d'une part des effets radiatifs réels et d'autre part des effets

radiatifs virtuels, est l'article de F. Bloch et A. Nordsieck [73] publié en 1937. Une dizaine d'années plus tard, J. M. Jauch and F. Rohrlich [79] prouvèrent que la compensation des termes divergents infrarouges était une propriété générale valable pour tout processus et ce à tous les ordres de la théorie perturbative.

Comme nous l'avons vu précédemment, les divergences infrarouges apparaissent d'une part lors de l'émission de photons mous réels et d'autre part lors de l'émission-absorption de photons mous virtuels (correction de vertex seulement dans le cas de la diffusion élastique). Plus précisément, seuls les photons mous réels rayonnés par une ligne externe [figure 2.15A] et les photons mous virtuels reliant deux lignes externes [figure 2.15B] induisent une divergence infrarouge [79] [80] [77].

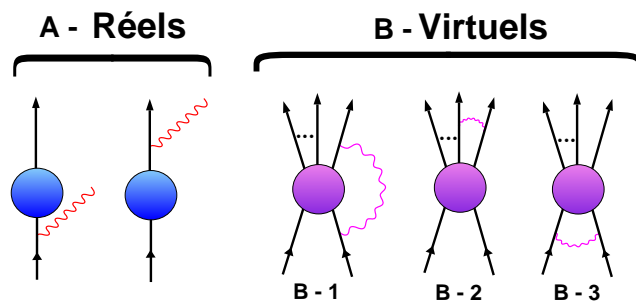


Figure 2.15 - *Cas général : diagrammes à considérer pour le calcul des corrections radiatives au premier ordre au processus représenté par la boule grisée et qui engendrent directement une divergence infrarouge.*

Que les divergences infrarouges qui apparaissent ne soient associées qu'à des photons mous, réels ou virtuels, émis ou/et absorbés par des lignes externes est tout à fait concevable puisque des photons de très grande longueur d'onde ne sont sensibles qu'aux caractéristiques à grande échelle de la distribution de charge et de courant.

La démonstration de l'élimination des termes divergents infrarouges par compensation repose sur le fait que les termes infinis infrarouges, qu'ils soient d'origine réelle ou virtuelle, peuvent être factorisés à tous les ordres du traitement perturbatif devant l'amplitude de diffusion du processus considéré à l'ordre le plus bas. Pour la démonstration de l'élimination des infinis infrarouges par compensation, on se reportera à l'article [58] de D.R. Yennie *et al.*, consacré exclusivement au problème des divergences infrarouges, et aux références suivantes : ([79], p. 390), ([77], p. 534), ([80], p. 331).

Dans le cadre de la diffusion élastique, nous nous contenterons ici de vérifier que les termes divergents infrarouges, issus d'une part des effets radiatifs réels et d'autre part des effets radiatifs virtuels, s'éliminent exactement par compensation au niveau de la section efficace. Par la suite, nous serons à même d'extraire les termes finis constituant la correction radiative que nous nous étions fixés de calculer. On souligne que la vérification de la compensation infrarouge est le test majeur de tout calcul de corrections radiatives.

Dans le cas de la diffusion Compton virtuelle nous devons prendre en compte les termes divergents infrarouges issus de la renormalisation à la propagation de l'électron lorsque le photon virtuel est couplé par l'une au moins de ses extrémités à une ligne interne.

On rappelle (cf. paragraphe 2.1 page 41) que la section efficace, σ_{eff} , correspondant à une cible d'épaisseur nulle, s'écrit à l'ordre α^3 :

$$\sigma_{eff} = \sigma_{Born}(1 + \delta_{Réels}) + 2\mathcal{R}e(M_{Born}M_V^*) \quad (2.93)$$

avec M_V la contribution des effets radiatifs virtuels d'ordre α^2 et M_{Born} l'amplitude de diffusion élastique à l'ordre le plus bas.

En admettant la factorisation de l'amplitude de Born dans M_V (cf. [58] par exemple), la section efficace σ_{eff} , s'exprime sous la forme :

$$\sigma_{eff} = \sigma_{Born} (1 + \delta_{Réels} + 2[\delta_V + \delta_{PV}]) \quad (2.94)$$

Dans la limite $m_e^2 \ll Q^2$, on avait obtenu :

– **Correction réelle :**

$$\delta_{Réels} = \frac{\alpha}{\pi} \left[-\frac{1}{\varepsilon_{IR}} + \gamma_E - \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] + \delta_R \quad (2.95)$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta_R = \frac{\alpha}{\pi} & \left\{ \ln \left(\frac{4(\Delta E_{cut})^2}{m_e^2} \right) \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \right. \\ & - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta_e^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta_e'^2}{4} \right) \\ & - \frac{1}{4} \ln^2(1 - \beta_e^2) - \frac{1}{4} \ln^2(1 - \beta_e'^2) + \ln 2 \ln(1 - \beta_e^2) + \ln 2 \ln(1 - \beta_e'^2) \\ & \left. + 2 \left(\ln^2 \left(\sin \frac{\theta_e}{2} \right) - \ln^2 4 \right) - \frac{\pi^2}{6} - Sp \left(\sin^2 \frac{\theta_e}{2} \right) \right\} \quad (2.96) \end{aligned}$$

– **Corrections virtuelles :**

– Correction de vertex :

$$\begin{aligned} \delta_V = \frac{\alpha}{2\pi} & \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \cdot \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \right. \\ & \left. + \left[\frac{3}{2} \ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 2 \right] + \left[-\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) + \frac{\pi^2}{6} \right] \right\} \quad (2.97) \end{aligned}$$

– Correction de polarisation du vide :

$$\delta_{PV} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{5}{3} + \ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) \right] \quad (2.98)$$

En effectuant $\delta_{Réels} + 2\delta_V$ à partir des équations (2.95) et (2.97), on vérifie directement que les termes divergents infrarouges se compensent exactement. Les termes restants sont finis et constituent la correction radiative.

2.4 Résultats

Dans la limite ultrarelativiste ($Q^2 \gg m_e^2$), la correction radiative au premier ordre à la diffusion élastique, δ , s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \delta = \frac{\alpha}{\pi} & \left\{ \ln \left(\frac{4(\Delta E_{cut})^2}{m_e^2} \right) \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \right. \\ & - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta_e^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta_e'^2}{4} \right) \\ & - \frac{1}{4} \ln^2(1 - \beta_e^2) - \frac{1}{4} \ln^2(1 - \beta_e'^2) + \ln 2 \ln(1 - \beta_e^2) + \ln 2 \ln(1 - \beta_e'^2) \\ & + 2 \left(\ln^2 \left(\sin \frac{\theta_e}{2} \right) - \ln^2 4 \right) - \frac{\pi^2}{6} - Sp \left(\sin^2 \frac{\theta_e}{2} \right) \\ & + \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \\ & + \left[\frac{3}{2} \ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 2 \right] + \left[-\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) + \frac{\pi^2}{6} \right] \\ & \left. + \frac{2}{3} \cdot \left[-\frac{5}{3} + \ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.99)$$

et la section élastique, σ_{eff} , correspondant à une cible d'épaisseur nulle (cf. 2.1), s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{eff} = \sigma_{Born}(1 + \delta) \quad (2.100)$$

On note dans l'expression de δ la présence de termes en (\ln^2) dominants à haut transfert et/ou lorsque les électrons sont relativistes. Ils joueront donc un rôle important dans les expériences qui se dérouleront auprès de Mami et surtout auprès de CEBAF.

La section efficace expérimentale, σ_0 , corrigée des effets radiatifs, s'écrit sous la forme :

$$\sigma_0 = \sigma_{exp}^{corr} = \left(\frac{1}{1 + \delta} \right) \sigma_{eff} \quad (2.101)$$

avec σ_{eff} , la section efficace expérimentale corrigée des effets radiatifs externes (cf. section 2.1 page 41). σ_0 est la section expérimentale que l'on compare à la section efficace théorique.

A présent, le calcul proprement dit de la correction radiative δ à la diffusion élastique est terminé. La figure [2.16], tirée du rapport [55], a l'avantage de présenter de manière synthétique toutes les étapes du traitement des divergences qui est la clé de tout calcul des corrections radiatives internes.

Jusque là, nous n'avons considéré que les corrections au premier ordre. Nous allons voir maintenant qu'une façon de prendre en compte les effets radiatifs d'ordre supérieur est d'exponentier δ . Par ailleurs, il nous reste encore à décrire la méthode qui permet de déterminer la coupure expérimentale ΔE_{cut} à appliquer dans (2.99).

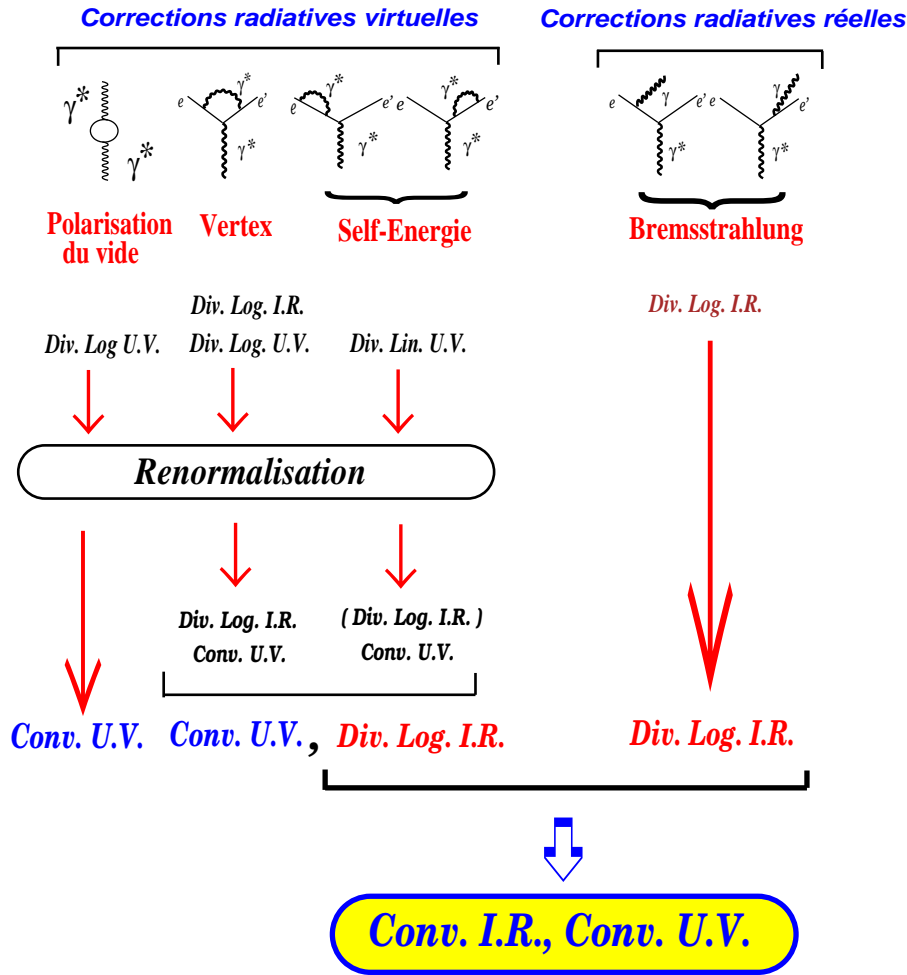


Figure 2.16 - Récapitulatif du processus d'élimination des divergences infrarouges (IR) et ultraviolettes (UV).

2.4.1 Exponentiation

Jusqu'à présent, nous avons considéré très justement une résolution expérimentale finie. Imaginons quelques instants que la résolution expérimentale puisse être infinie, c'est-à-dire qu'il soit possible de détecter jusqu'à la plus petite perte d'énergie des électrons. Ainsi, on serait en mesure de ne sélectionner que les événements purement élastiques. Si la résolution pouvait être infinie, on aurait $\Delta E = 0$ et ceci conduirait à $|\delta| \gg 1$ (formule 2.99) : la section efficace expérimentale serait divergente et négative dans la limite $\delta \rightarrow 0$. Ceci n'aurait aucun sens physique. En fait, dans la limite $\delta \rightarrow 0$, la section efficace expérimentale élastique devrait être nulle puisqu'il ne peut pas exister d'événement purement élastique. En effet, il est inévitable qu'un électron rayonne avant ou après diffusion. A la lumière de ces constations, J. Schwinger [59] considéra dans (2.100) $(1 + \delta)$ comme les deux premiers termes du développement limité de $(\exp(\delta))$ et recouvrit ainsi le bon comportement pour la section efficace expérimentale élastique dans la limite $\Delta E \rightarrow 0$. Le fait de remplacer $(1 + \delta)$ par $(\exp(\delta))$ constitue ce que l'on appelle l'exponentiation de la correction radiative. Dans son article [54], L.C. Maximon détaille cette procédure et signale les principales références qui traitent ce sujet.

Le fait d'exponentier la correction radiative revient à considérer le rayonnement et l'émission-absorption de n photons et non plus d'un seul comme précédemment. Néanmoins, il est essentiel que cette émission (-absorption) multiple de photons ne perturbe en rien le mouvement des électrons. Par conséquent, seule l'exponentiation de la correction au rayonnement de photons, réels ou virtuels, de très basse énergie est fondée. Cela dit, exponentier les seuls termes les plus divergents infrarouges ou exponentier la totalité de la correction conduit, pour notre expérience, à des résultats numériques identiques à 2% près. On choisit d'exponentier la totalité de la correction et on écrit dorénavant :

$$\sigma_{eff} = \sigma_{Born} \exp(\delta) \quad (2.102)$$

Comme, expérimentalement, on ne mesure jamais σ_{eff} mais σ_{exp} contenant les effets radiatifs internes et externes liés au “milieu cible”, nous utilisons pratiquement :

$$\sigma_{exp} = \sigma_{Born} \exp(\delta + \delta') \quad (2.103)$$

avec δ' la correction, définie page 42, correspondant aux effets radiatifs externes.

On obtient finalement la section efficace expérimentale corrigée des effets radiatifs (σ_0 ou σ_{exp}^{corr}), comparable à la section efficace théorique, en appliquant la formule :

$$\sigma_{exp}^{corr} = \sigma_0 = \sigma_{exp} \exp[-(\delta + \delta')] \quad (2.104)$$

On rappelle que tant δ que δ' sont dépendantes de la coupure expérimentale en énergie ΔE_{cut} que nous allons maintenant fixer.

2.4.2 Détermination de la coupure expérimentale ΔE

La coupure expérimentale en énergie ΔE_{cut} dont sont fonctions les corrections radiatives externes et internes δ et δ' se détermine à partir des données brutes acquises expérimentalement. Pour illustrer la méthode utilisée, nous nous appuyons sur des données obtenues à Mayence en 1996 en diffusion élastique.

Lorsqu'on observe la distribution en énergie des électrons diffusés au sortir du spectromètre (figure [2.17], trait plein), il apparaît :

- un pic au niveau de l'énergie théorique des électrons diffusés dont la largeur résulte de la convolution de la résolution expérimentale avec l'acceptance du spectromètre considéré.
- une traîne vers les plus basses énergies connue sous le nom de queue radiative et correspondant à des électrons ayant rayonné des photons d'énergie supérieure à la résolution de l'appareillage. Ces photons “détectés” sont qualifiés de “durs” relativement aux photons mous émis qui ne peuvent être discriminés.

La méthode adoptée pour déterminer la coupure en énergie ΔE_{cut} consiste à représenter

$$f(\Delta E_{cut}) = \exp[-(\delta + \delta')] \times [Nb. decoupsbruts] \quad (2.105)$$

$$f(\Delta E_{cut}) \propto \sigma_{exp}^{corr} \quad (2.106)$$

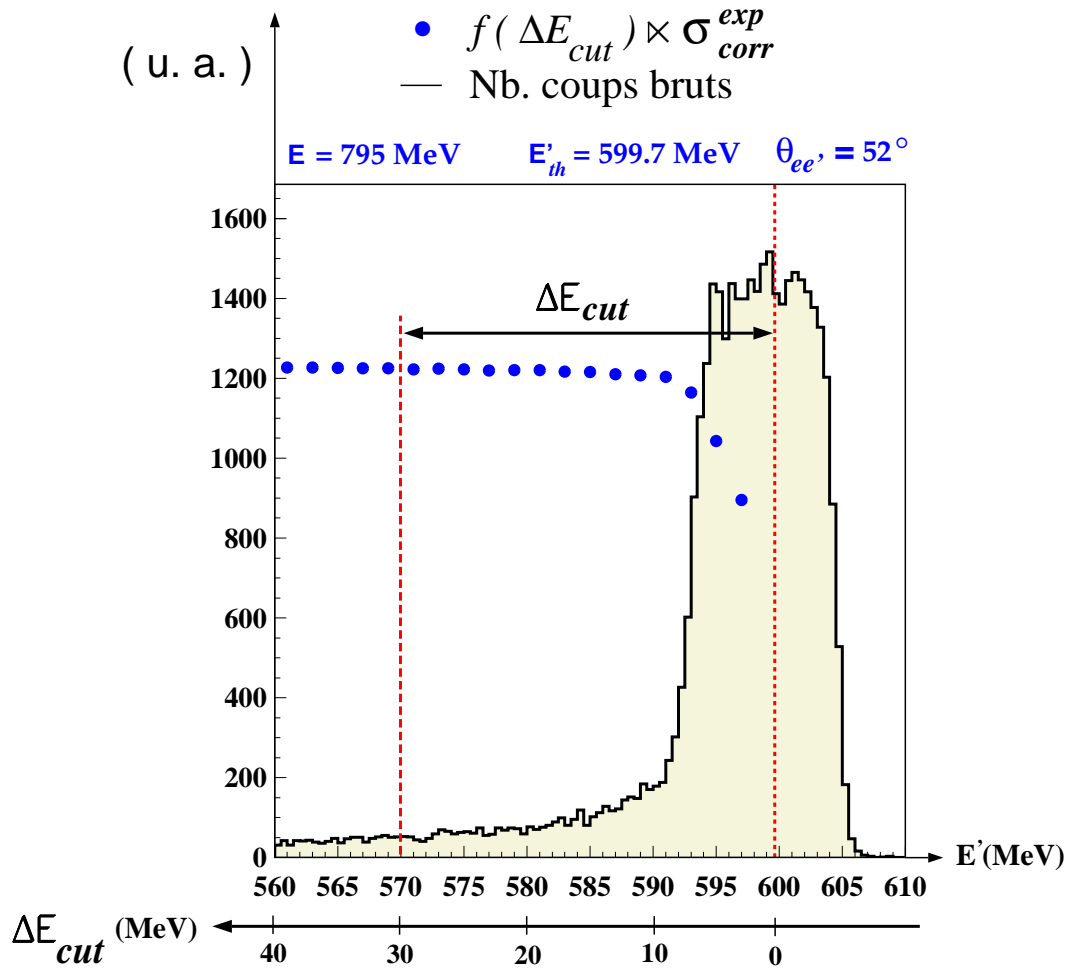


Figure 2.17 - Détermination de la coupure ΔE_{cut} : cas correspondant à une cinématique élastique réalisée à Mayence pour laquelle l'énergie incidente du faisceau d'électrons était de 795 MeV et l'angle de diffusion des électrons de 52° . On souligne que l'unité des ordonnées est arbitraire. L'énergie théorique des électrons diffusés élastiquement est de 599.7 MeV. Pour réaliser ce spectre, on sélectionne des événements dans toute l'acceptance horizontale du spectromètre ($\pm 20 \text{ mrad}$) et dans une acceptance verticale réduite à $-50 \text{ mrad} < \varphi < 0 \text{ mrad}$ (acceptance verticale totale $\pm 70 \text{ mrad}$). Les points noirs sont obtenus à partir de la formule (2.105). On choisit comme coupure expérimentale $\Delta E_{cut} = 15 \text{ MeV}$.

Sur la figure [2.17], on a symbolisé $f(\Delta E_{cut})$ par les points noirs. On voit que cette fonction est rapidement croissante jusqu'à $\Delta E_{cut} \simeq 10 \text{ MeV}$ et atteint ensuite un plateau. Dans le domaine en ΔE_{cut} correspondant au plateau on dit qu'on sature la correction radiative. On adopte ici pour ΔE_{cut} 15 MeV. Ceci est justifié puisque $f(\Delta E_{cut})$ doit, comme la section efficace théorique, être indépendante de la coupure expérimentale. Au-delà de $\Delta E_{cut} = 50 \text{ MeV}$, $f(\Delta E_{cut})$ croît à nouveau. Cela signifie que pour cette expérience, on quitte le domaine de validité du calcul des corrections radiatives. En particulier, on ne peut plus négliger la variation de Q^2 aux vertex en cas d'émission de photons réels de haute énergie.

Nous verrons dans le chapitre suivant que la méthode utilisée pour déterminer la coupure expérimentale dans le cas de la diffusion Compton virtuelle est quelque peu différente. En effet, cette fois, il faudra raisonner sur le spectre en masse manquante carrée (M_X^2) et non plus sur la distribution en énergie de l'électron.

2.4.3 Application numérique

Dans le cas de la cinématique élastique ayant servi d'illustration à la méthode de détermination de la coupure expérimentale, la correction radiative totale au premier ordre, $(\delta + \delta')$, est de **-21.1%** pour $\Delta E_{cut} = 15 \text{ MeV}$.

$$\sigma_{exp}^{corr} = \sigma_{exp} \exp[-(\delta_V + \delta_R + \delta')] = \sigma_{exp} \exp(0.211) = 1.235 \sigma_{exp} \quad (2.107)$$

avec $\delta_V = -16.3\%$ et $(\delta_R + \delta') = -3.4\% - 1.4\%$.

On remarque que la section efficace expérimentale corrigée des effets radiatifs σ_{exp}^{corr} est supérieure à la section efficace expérimentale non corrigée σ_{exp} .

2.5 Conclusion

L'exercice du calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique, présenté dans ce chapitre, nous a permis d'introduire tous les outils ainsi que le vocabulaire associés aux corrections radiatives. En ce qui concerne les corrections radiatives internes, après détermination de l'ordre le plus bas en α de la section efficace relative à la réaction étudiée, il est généralement suffisant de considérer tous les graphes contribuant au niveau de la section efficace à l'ordre en α immédiatement supérieur. A partir des expressions des amplitudes de chacun des graphes on est capable d'identifier les termes divergents dans les limites infrarouge et ultraviolette. Pour évaluer ces amplitudes, on a ensuite recours à une méthode de régularisation. Ici, nous avons choisi la régularisation dimensionnelle qui permet d'évaluer les intégrales en "transitant" par un espace fictif à D -dimensions. Pour résoudre les intégrales, on emploie la paramétrisation de Feynman. Cette manipulation fait apparaître des intégrales sur des nouveaux paramètres connus sous le nom de paramètres de Feynman. La procédure de renormalisation conduit à la disparition des termes infinis ultraviolets tandis que la compensation infrarouge, qui s'opère au niveau de la section efficace, élimine les termes divergents infrarouges subsistants, issus d'une part des corrections virtuelles et d'autre part des corrections réelles.

En nous appuyant sur le cas d'école simple du calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique, nous allons nous appliquer dans le chapitre suivant, à développer le calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle constituant le sujet de ma thèse. Nous verrons que la méthode que nous avons développée se ramène à utiliser les résultats que nous avons dérivés dans ce chapitre.

Chapitre 3

Calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle

La motivation physique de l'expérience de diffusion Compton virtuelle sous le seuil de production du pion, argumentée dans le premier chapitre de ma thèse, consiste à mesurer de nouvelles observables du proton : les Polarisabilités Généralisées. On rappelle que l'effet de ces polarisabilités est contenu dans le rapport de la section efficace expérimentale, obtenue par photo-électroproduction sur un proton, à la section efficace théorique entièrement calculable et proportionnelle à $|T_{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$. Comme dans toute expérience de diffusion d'électrons, il est vital de corriger des effets radiatifs la section efficace expérimentale mesurée avant de pouvoir la comparer à une section efficace théorique ne tenant compte d'aucun rayonnement. Dans notre expérience, l'effet relatif maximum estimé des polarisabilités étant de 26%, il est indispensable de déterminer la section efficace absolue corrigée des effets radiatifs avec une précision d'au moins 3%. Ceci implique donc de calculer les corrections radiatives avec la meilleure précision possible. Ce dernier point a motivé un calcul complet et inédit des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle dans le cadre de QED en minimisant le nombre d'approximations. Ce chapitre est dédié à la présentation détaillée du calcul des corrections radiatives internes à la diffusion Compton virtuelle sous le seuil de production du pion.

Les corrections radiatives qualifiées d'externes, dépendantes de la cible, ont été évoquées au début du chapitre précédent. Dans notre expérience de diffusion Compton virtuelle, la prise en compte de ces corrections s'effectue au niveau de la détermination de l'angle solide et se trouve détaillée dans le rapport de L. Vanhoorebeke [50] et dans la thèse de D. Lhuillier [3].

La complexité du calcul des corrections radiatives internes à la diffusion Compton virtuelle, comparativement au calcul que nous venons de mener dans le cas de la diffusion élastique, provient du nombre important de graphes à considérer. En effet, comme la section efficace de diffusion Compton virtuelle à l'ordre le plus bas en α est déjà en α^3 (présence d'un photon réel supplémentaire dans l'état final), il faut prendre en compte tous les graphes contribuant à l'ordre α^4 au niveau de la section efficace. Le nombre de graphes est néanmoins réduit à 30 car nous avons négligé dans le calcul qui suit les effets radiatifs sur le proton ainsi que les graphes où deux photons virtuels sont échangés entre les vertex leptonique et hadronique. Ceci est en effet justifié dans le chapitre 2 page 54.

Nous débuterons ce chapitre en rappelant le cadre théorique de la diffusion Compton virtuelle afin d'introduire clairement le calcul des corrections radiatives que nous détaillerons. Les deux parties qui suivront concerneront les corrections radiatives virtuelles et réelles à prendre en compte. Dans le cas des corrections radiatives virtuelles, nous avons adopté une technique astucieuse d'addition-soustraction mise au point par M. Vanderhaeghen qui a l'avantage de simplifier notablement les calculs. Cette méthode conduit à une expression comportant deux parties : une partie analytique contenant certains termes divergents infrarouges et une partie sans divergence, intégrable directement numériquement. A ce stade, nous vérifierons, au niveau de la section efficace, que les termes divergents infrarouges issus des deux types de corrections se compensent bien afin d'extraire les termes finis constituant la correction radiative. Ensuite, nous nous consacrerons à l'intégration des termes numériques ayant suscité des méthodes particulières du fait de la présence de pôles dans l'intervalle d'intégration et/ou de singularités aux bornes de l'intervalle. Enfin, nous terminerons ce chapitre par la présentation des résultats que nous avons obtenus. Je souligne enfin que l'emploi du “*nous*” dans ce chapitre prend un sens tout particulier puisqu'il se réfère à M. Vanderhaeghen, J. Van de Wiele et David Lhuillier avec qui j'ai travaillé en étroite collaboration dans le but de mener à bien ce calcul. Ensemble nous avons écrit un article [81] auquel on se reportera souvent puisqu'il comporte de nombreux détails que je ne développerai pas dans ce chapitre. L'autre référence importante sur le sujet est la thèse de D. Lhuillier [3].

3.1 Cadre du calcul et approximation

Expérimentalement, on accède à la diffusion Compton virtuelle (VCS) par photo-électroproduction. La section efficace théorique relative à cette réaction est proportionnelle au carré de la somme des amplitudes “Bethe-Heitler” (T_{BH}), “Born” (T_{Born}^{FVCS}) et “Non-Born” ($T_{Non-Born}^{FVCS}$) toutes d'ordre ($\alpha\sqrt{\alpha}$). Les graphes associés à ces trois processus sont représentés sur la figure [3.1-B].

Autant les amplitudes “Bethe-Heitler” et “Born” sont entièrement calculables autant l'amplitude “Non-Born” nécessite l'emploi de modèles (cf. chapitre 1 page 31) pour décrire les différents états du spectre d'excitation du proton. On rappelle que cette amplitude “Non-Born” est paramétrisée par les Polarisabilités Généralisées [1] [2] que l'on souhaite extraire expérimentalement. D'après les prédictions dont nous disposons, l'effet des Polarisabilités reste relativement faible. Cet effet croît en fonction de l'énergie (q') du photon réel émis dans l'état final. Pour les valeurs maximales de q' accessibles expérimentalement pour rester sous le seuil de production du pion (Mayence : $q'_{max}=111.5\text{MeV}$; Jefferson Lab. : $q'_{max}=120\text{MeV}$), l'effet des Polarisabilités Généralisées varie, dans le domaine cinématique exploitable :

- de 8 à 13% pour les cinématiques de Mayence (cf. figure 1.11 page 34), selon les modèles (modèle non relativiste de quarks et modèle de Lagrangien effectif),
- de 9 à 26% pour les cinématiques de Jefferson Lab. (modèle de Lagrangien effectif, cf. figure 1.13 page 36).

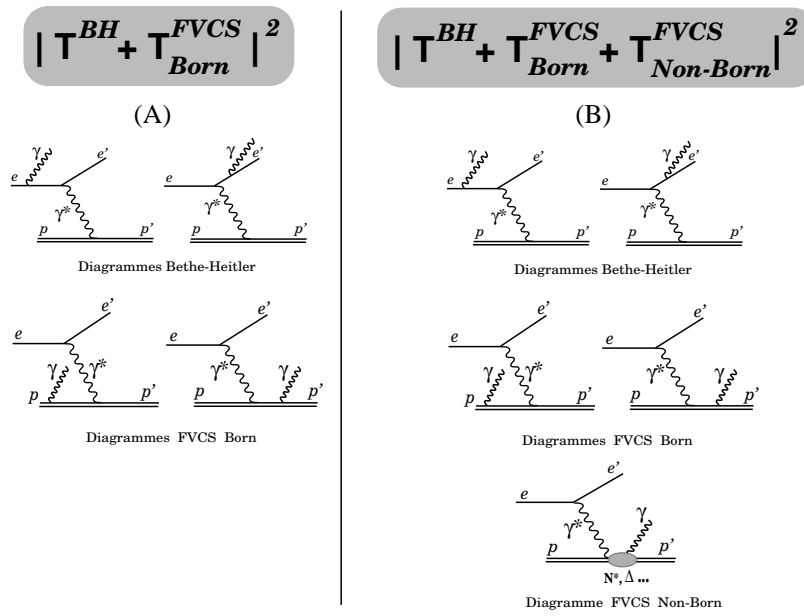


Figure 3.1 - Graphes pris en compte pour le calcul de $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$ (A) et de $|T^{BH} + T_{Born}^{FVCS} + T_{Non-Born}^{FVCS}|^2$ (B). La dernière amplitude de diffusion au carrée décrit l'expérience.

Principale hypothèse du calcul des corrections radiatives :

Etant donné que l'amplitude “Non-Born” requière l'emploi d'un modèle décrivant les états résonants du proton et sachant que l'effet des polarisabilités est relativement faible dans les domaines cinématiques explorés, nous calculons les corrections radiatives au premier ordre à la section efficace théorique “Bethe-Heitler + Born” et appliquons le même facteur correctif aux données qui, elles, contiennent la contribution de l'amplitude “Non-Born”. Nous supposons que l'effet relatif des corrections radiatives est le même pour la section efficace “Bethe-Heitler+Born” et pour la section efficace “Bethe-Heitler+Born+Non-Born” :

$$\sigma_{eff}^{BH+Born+Non-Born} = (1 + \delta) \sigma^{BH+Born+Non-Born} \quad (3.1)$$

avec :

$\sigma_{eff}^{BH+Born+Non-Born}$: la section efficace expérimentale corrigée des effets radiatifs externes,

$\sigma^{BH+Born+Non-Born}$: la section efficace expérimentale corrigée des effets radiatifs externes et internes,

δ : les corrections radiatives internes calculées à partir de la section efficace théorique proportionnelle à $|T_{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$, cf. figure [3.1-A].

Cette hypothèse majeure nous conduit à commettre une erreur sur la section efficace d'autant plus grande que l'effet des polarisabilités est important. Par conséquent, dans le cas des expériences se déroulant à Jefferson Lab, où l'effet des polarisabilités peut atteindre 26% pour une énergie du photon réel émis de 120MeV, nous devons tenir compte

de cette incertitude. Nous soulignons qu'un calcul des corrections radiatives tenant compte de l'amplitude "Non-Born" serait très délicat puisque dépendant d'un modèle théorique.

Dans ces conditions, le calcul qui suit correspond au calcul des corrections radiatives à la section efficace "Bethe-Heitler+Born" dans lequel seuls les effets radiatifs de l'électron sont pris en compte avec omission des graphes où deux photons virtuels sont échangés entre les vertex hadronique et leptonique.

La section efficace "Bethe-Heitler+Born" étant d'ordre α^3 , nous considérerons tous les graphes contribuant à l'ordre α^4 . Selon les hypothèses pré-citées, ces graphes sont au nombre de 30 dont 20 correspondent à des corrections virtuelles (cf. figure [3.2] page 89) et 10 à des corrections réelles (cf. figure [3.5] page 98). On exprime la section efficace théorique "Bethe-Heitler+Born" avec effets radiatifs internes au premier ordre, $\sigma_{ray.}^{BH+Born}$, sous la forme :

$$\sigma_{ray.}^{BH+Born} = \underbrace{\sigma^{BH+Born}}_{\text{ordre } \alpha^3} + 2 \mathcal{R}e \left(\underbrace{\underbrace{\mathcal{M}^{BH+Born}}_{\text{ordre } \alpha\sqrt{\alpha}} \cdot \underbrace{\mathcal{M}_V^*}_{\text{ordre } \alpha^2\sqrt{\alpha}}}_{\text{ordre } \alpha^4} \right) + \underbrace{(\mathcal{M}_R)^2}_{\text{ordre } \alpha^4} \quad (3.2)$$

avec :

$\mathcal{M}^{BH+Born}$: amplitude de diffusion "Bethe-Heitler+Born",

\mathcal{M}_V : somme des amplitudes des 14 graphes associés aux effets radiatifs virtuels,

\mathcal{M}_R : somme des amplitudes des 10 graphes associés aux effets radiatifs réels.

Tout au long de ce chapitre, nous adoptons les conventions de Bjorken et Drell ([68] page 285) rappelées dans l'annexe B.

3.2 Corrections radiatives virtuelles

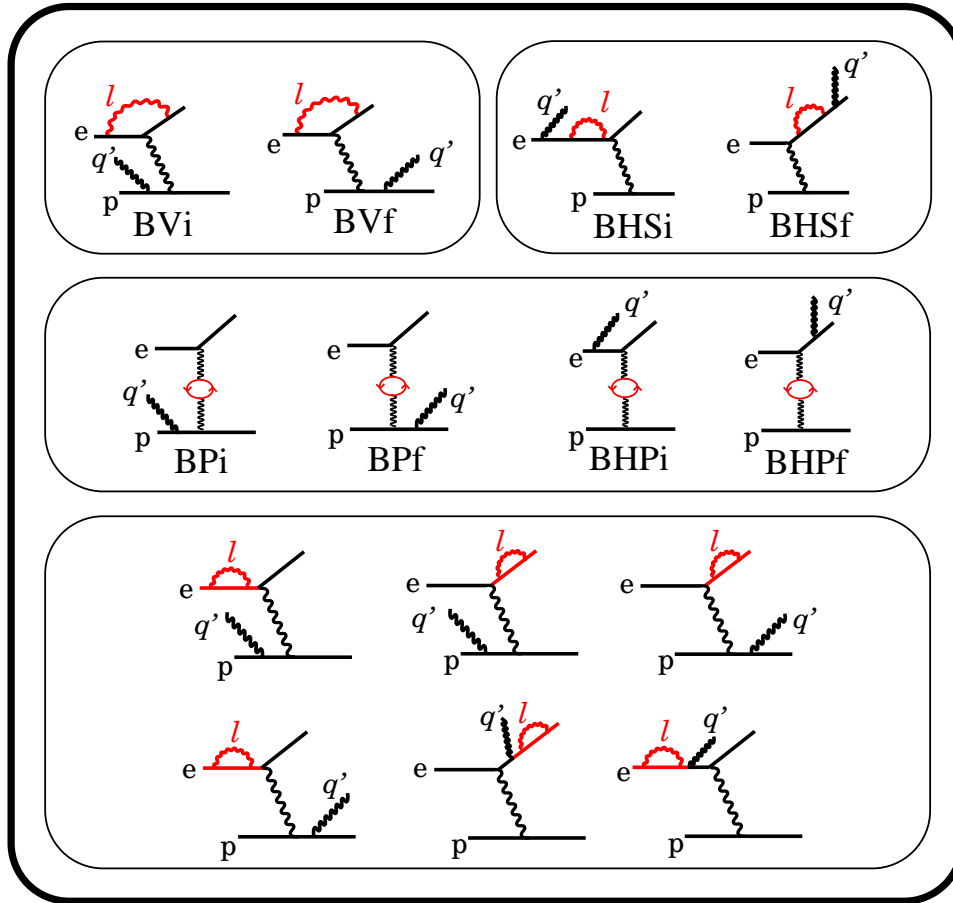
L'ensemble des graphes associés aux effets radiatifs virtuels que nous considérons sont représentés sur la figure 3.2.

Parmi les 20 graphes représentés sur la figure [3.2], on distingue deux classes de graphes :

- **Classe I :** graphes pour lesquels l'amplitude s'obtient à partir du calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique (chapitre 2). La correction induite par ces graphes est purement analytique.
- **Classe II :** graphes ayant nécessité un traitement particulier faisant l'objet de ce chapitre.

Les six graphes de correction de vertex de la classe II ont en effet monopolisé toutes nos forces et la majeure partie de ce chapitre leur sera en retour consacrée. Tandis que l'écriture même des amplitudes de ces graphes présageait un travail long et délicat en vue

Classe I



Classe II

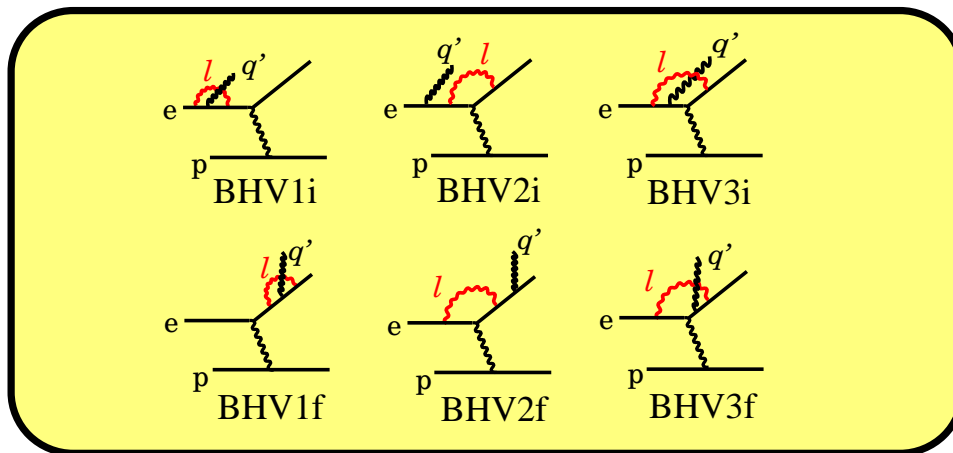


Figure 3.2 - Ensemble des graphes impliqués dans le calcul des corrections radiatives virtuelles. Les préfixes “B” et “BH” correspondent à “Born” et “Bethe-Heitler”. Les suffixes “i” (initial) et “f” (final) indique l’origine de l’émission du photon réel VCS : ligne de l’électron incident (i) ou ligne de l’électron sortant (f). Les lettres “V”, “S” et “P” signalent respectivement les graphes de correction de vertex, de self-énergie et de polarisation du vide. La numérotation des graphes au sein d’un même type est arbitraire. Classe I : graphes dont le traitement s’appuie sur le calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique. Classe II : graphes sur lesquels a porté mon travail.

d’obtenir une expression purement analytique, M. Vanderhaeghen étudiait chaque terme avec précaution afin d’identifier les divergences. Il remarqua alors qu’en additionnant puis en soustrayant un terme divergent, habilement choisi, on pouvait isoler la divergence dans un terme déjà rencontré dans le cadre du calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique. À l’issue de cette opération, l’amplitude apparaît sous la forme d’une somme de deux intégrales :

- une intégrale divergente que l’on sait régulariser et résoudre analytiquement,
- une intégrale ne présentant aucune divergence pouvant être évaluée directement dans l’espace-temps à 4 dimensions. Directement oui, mais pas sans mal ! Bien que dépourvue de divergences, cette intégrale constitue sans aucun doute la partie la plus laborieuse du calcul après la dérivation des expressions des amplitudes.

Après paramétrisation de Feynman, l’intégrale sur l’espace-temps se ramène pour chacun des six graphes à la somme d’une triple et d’une double intégration sur les paramètres de Feynman. Après une première intégration réalisée analytiquement, la fonction à intégrer devient compliquée et nous avons eu recours au traitement numérique. Pour la première intégration, nous avons mis au point des procédures d’intégration analytiques dont certaines permettent d’intégrer dans le plan complexe. Concernant, l’intégration numérique, il a été indispensable de contrôler la convergence des résultats à chaque étape. En outre, pour s’affranchir des erreurs liées à la programmation des nombreux termes, deux programmes indépendants ont été élaborés.

Compte-tenu de ce qui précède, la correction des effets radiatifs virtuels ($\mathcal{C}_{Virtuals}$) s’exprime sous la forme de plusieurs termes analytiques et d’un terme obtenu numériquement. Bien sûr, ceci suppose la compensation des termes infinis infrarouges, cf. page 98. On écrira :

$$\mathcal{C}_{Virtuals} = \underbrace{T_1^{anal.}}_{Classe I} + \underbrace{T_2^{anal.}}_{Classe II} + \underbrace{T^{num.}}_{Classe II} \quad (3.3)$$

La dérivation du terme analytique $T_1^{anal.}$ ne présentant aucune difficulté (cf. chapitre 2), nous nous concentrerons dorénavant sur le traitement des graphes appartenant à la seconde classe. Afin d’illustrer la méthode d’addition-soustraction que M. Vanderhaeghen a utilisé pour dériver les expressions des amplitudes associées aux six graphes de la classe II, j’ai choisi de m’appuyer sur le graphe “BHV2i”. Pour les autres graphes, on se reportera à l’article [81] et à la thèse de D. Lhuillier où figurent les principales étapes du calcul du graphe “BHV1i”.

3.2.1 Méthode d’addition-soustraction

L’enjeu de cette partie est d’obtenir l’expression de l’amplitude associée au graphe “BHV2i” sous la forme d’un terme analytique et d’une intégrale ne comportant plus aucune divergence. Cette méthode a été adaptée aux graphes des corrections radiatives au processus “Bethe-Heitler + Born” par M. Vanderhaeghen. Ma contribution principale à

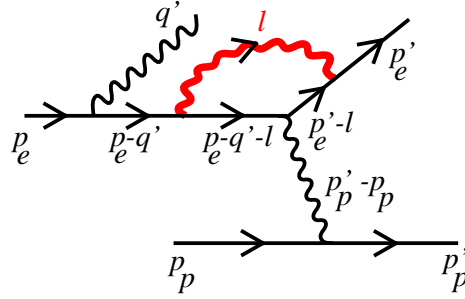


Figure 3.3 - Graphe BHV2i

ce calcul est le traitement de l'intégrale non divergente qui fera l'objet du paragraphe 3.5.

En adoptant les notations indiquées sur la figure 3.3, l'application des règles de Feynman (cf. annexe B) permet d'écrire l'amplitude associée au graphe "BHV2i" sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV2i} = & \frac{i e^4}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \\ & \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\alpha (\not{p}'_e - \not{l} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_e - \not{q}' - \not{l} + m_e) \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot (p_e - q') - 2p_e \cdot q'] [l^2 - 2l \cdot p'_e] [l^2]} \\ & \cdot \frac{(\not{p}_e - \not{q}' + m_e)}{-2p_e \cdot q'} \not{\epsilon}^* u(p_e, s_e) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans l'expression précédente, J_ν représente le courant au vertex hadronique :

$$J_\nu = -i e \bar{N}(p'_p, s'_p) \Gamma_\nu N(p_p, s_p) \quad (3.5)$$

avec Γ_ν défini dans l'annexe B page 243.

Soit I_ν^{BHV2i} l'intégrale sur l'espace-temps du photon virtuel :

$$I_\nu^{BHV2i} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\alpha (\not{p}'_e - \not{l} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_e - \not{q}' - \not{l} + m_e) \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot (p_e - q') - 2p_e \cdot q'] [l^2 - 2l \cdot p'_e] [l^2]} \quad (3.6)$$

Etude du comportement de I_ν^{BHV2i} :

- Dans la limite infrarouge ($l \rightarrow 0$) :

$$I_\nu^{BHV2i} \rightarrow \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-2p_e \cdot q'] [-2l \cdot p'_e] [l^2]} \propto \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^3} \quad (3.7)$$

I_ν^{BHV2i} est donc convergente dans la limite infrarouge.

– Dans la limite ultraviolette ($l \rightarrow \infty$) :

$$I_\nu^{BHV2i} \rightarrow \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \gamma^\nu \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2][l^2][l^2]} \propto \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4} \quad (3.8)$$

I_ν^{BHV2i} présente une divergence logarithmique dans la limite ultraviolette.

On remarque que seul le terme en $(\gamma^\alpha \not{l} \gamma^\nu \not{l} \gamma_\alpha)$ de (3.6) est responsable de cette divergence. L'intégration des autres termes de (3.6) peut donc être évaluée directement sur l'espace habituel à 4 dimensions.

En tenant compte des remarques précédentes, on décompose I_ν^{BHV2i} sous la forme :

$$\begin{aligned} I_\nu^{BHV2i} = & \underbrace{\mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \gamma^\nu \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot (p_e - q') - 2p_e \cdot q'] [l^2 - 2l \cdot p'_e] [l^2]}}_{\text{Terme divergent U.V.}} \\ & + \underbrace{\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\alpha [(\not{p}'_e + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_e - \not{q}' + m_e) - (\not{p}'_e + m_e) \gamma^\nu \not{l} - \not{l} \gamma^\nu (\not{p}_e - \not{q}' + m_e)] \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot (p_e - q') - 2p_e \cdot q'] [l^2 - 2l \cdot p'_e] [l^2]}}_{\text{Terme fini}} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Méthode d'addition-soustraction :

Nous nous proposons d'isoler la divergence dans un terme dont nous connaissons le développement analytique. Pour ce faire nous allons additionner et soustraire un terme à (3.9). Ce terme est choisi de telle sorte

- qu'il présente la même divergence que le terme infini contenu dans l'amplitude du graphe étudié,
- qu'il soit possible de le traiter analytiquement à la manière des termes issus des corrections radiatives à la diffusion élastique.

Dans le cas du graphe "BHV2i", le terme que nous avons choisi d'additionner et de soustraire est :

$$\mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \gamma^\nu \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot p'_e] [l^2 - 2l \cdot p_e] [l^2]} \quad (3.10)$$

On peut vérifier que ce terme présente la même divergence logarithmique ultraviolette que le terme divergent de (3.9). De plus, nous l'avons déjà rencontré et traité analytiquement dans le chapitre précédent, se reporter à l'expression (2.34) page 63 correspondant à la correction de vertex relative au calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique.

Après addition et soustraction du terme (3.10), I_ν^{BHV2i} (équation 3.9) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
I_\nu^{BHV2i} = & \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \gamma^\nu \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l.p'_e][l^2 - 2l.p_e][l^2]} \\
& - 4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\not{l} \gamma^\nu \not{l} [p_e.q' - l.q']}{[l^2 - 2l.(p_e - q') - 2p_e.q'][l^2 - 2l.p'_e][l^2 - 2l.p_e][l^2]} \\
& + 2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p}_e - \not{q}') \gamma^\nu \not{l} + \not{l} \gamma^\nu \not{p}'_e - m_e^2 \gamma^\nu + 2m_e(p_e + p'_e - q' - 2l)^\nu - (\not{p}_e - \not{q}') \gamma^\nu \not{p}'_e}{[l^2 - 2l.(p_e - q') - 2p_e.q'][l^2 - 2l.p'_e][l^2]} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

- Le premier terme de (3.11) est le terme divergent ultraviolet que nous avons ajouté,
- Le second terme de (3.11) résulte de la soustraction entre le terme initial divergent ultraviolet (3.9) et le terme (3.10). En comptant les puissances de l au numérateur et au dénominateur, on s'aperçoit que ce terme ne présente aucune divergence. Nous pourrions donc l'intégrer directement sur l'espace à 4 dimensions sans avoir à utiliser la régularisation dimensionnelle.
- Le troisième terme de (3.11) correspond au deuxième terme de (3.9) que nous avons seulement simplifié ($pslashu = mu$).

Ainsi, comme je l'avais annoncé, I_ν^{BHV2i} s'exprime en fonction d'une intégrale divergente connue et de deux intégrales convergentes auxquelles nous appliquerons la paramétrisation de Feynman et qui seront traitées numériquement, cf. page 101. Laissons pour l'heure les deux intégrales convergentes et intéressons-nous à la première intégrale de (3.11) :

$$\mathcal{I}_{UV} = \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \gamma^\nu \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l.p'_e][l^2 - 2l.p_e][l^2]} \quad (3.12)$$

Traitement de l'intégrale divergente :

Le traitement de l'intégrale divergente (3.12) est présenté en détail dans le chapitre précédent page 63 et nous ne relaterons ici que les étapes principales :

- paramétrisation de Feynman : la présence de trois facteurs au dénominateur induit l'apparition de deux paramètres de Feynman. Soit x et y ces paramètres.
- application des formules d'algèbre et d'intégration en D -dimensions.
- intégration sur les paramètres de Feynman à l'aide des formules analytiques définies page 246.
- remplacement de D par son expression en fonction de ε_{UV} ($D = 4 - 2\varepsilon_{UV}$).

A l'issu de ces opérations, (3.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{UV} = \frac{i}{(4\pi)^2} & \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) + 1 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right. \\ & + \frac{1}{Q^2} \left[\not{q}' \gamma^\nu \not{q} \left(-1 + \frac{v^2+1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right) \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) (\not{p}'_e \gamma^\nu \not{p}_e + \not{p}_e \gamma^\nu \not{p}'_e) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

A l'avenir, nous noterons le terme analytique de (3.13), fonction de variables cinématiques et de matrices γ , $T_{anal}^{BHV2i\nu}$. D'autre part, afin d'alléger les expressions, nous remplaçons $\left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right]$ par $\frac{1}{\varepsilon_{UV}}$. Ainsi, \mathcal{I}_{UV} devient :

$$\mathcal{I}_{UV} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{UV}} + 1 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) + T_{anal}^{BHV2i\nu} \right\} \quad (3.14)$$

Amplitude associée au graphe “BHV2i” :

Compte-tenu de ce qui précède, l'expression de l'amplitude associée au graphe “BHV2i” s'écrit :

$$\mathcal{M}_{BHV2i} = \frac{i e^4}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) [\mathcal{I}_{UV} + \mathcal{I}_{conv.1}^\nu + \mathcal{I}_{conv.2}^\nu] \frac{(\not{p}_e - \not{q}' + m_e)}{-2 p_e \cdot q'} \not{q}^* u(p_e, s_e) \quad (3.15)$$

avec $\mathcal{I}_{conv.1}^\nu$ et $\mathcal{I}_{conv.2}^\nu$ les deux intégrales convergentes définies dans (3.11).

En remplaçant \mathcal{I}_{UV} dans (3.15) par son expression (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV2i} = & \frac{-e^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} + 1 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \frac{1}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \frac{(\not{p}_e - \not{q}' + m_e)}{-2 p_e \cdot q'} \not{q}^* u(p_e, s_e) \\ & + \frac{i e^4}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \left[\frac{i}{(4\pi)^2} T_{anal}^{BHV2i\nu} + \mathcal{I}_{conv.1}^\nu + \mathcal{I}_{conv.2}^\nu \right] \\ & \cdot \frac{(\not{p}_e - \not{q}' + m_e)}{-2 p_e \cdot q'} \not{q}^* u(p_e, s_e) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Il est alors intéressant de constater que l'amplitude \mathcal{M}_{BHi} correspondant au graphe direct associé au processus Bethe-Heitler (cf. annexe E page 259) peut se factoriser dans le premier terme de (3.16). On écrit alors (3.16) sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV2i} = & \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} + 1 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \mathcal{M}_{BHi} \\ & + \frac{i e^4}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \left[\frac{i}{(4\pi)^2} T_{anal}^{BHV2i\nu} + \mathcal{I}_{conv.1}^\nu + \mathcal{I}_{conv.2}^\nu \right] \\ & \cdot \frac{(\not{p}_e - \not{q}' + m_e)}{-2 p_e \cdot q'} \not{q}^* u(p_e, s_e) \end{aligned} \quad (3.17)$$

A ce stade, l'amplitude associée au graphe “BHV2i” s'exprime en fonction

– d'un terme analytique ($T_{anal}^{BHV2i\nu}$),

- de deux intégrales convergentes à évaluer numériquement (cf. section 3.5 page 101),
- du produit de l’amplitude connue \mathcal{M}_{BHi} et d’un terme divergent ultraviolet.

Comme pour la diffusion élastique, l’étape suivante consiste à renormaliser le vertex et à vérifier que les termes divergents ultraviolets de (3.16) s’annulent.

3.2.2 Renormalisation

Dans cette partie, nous nous intéresserons d’abord à la renormalisation de vertex du graphe “BHV2i” puis énumérerons tous les graphes nécessitant une renormalisation et nous prendrons soin d’indiquer ceux qui présenteront des termes divergents infrarouges.

Renormalisation du graphe “BHV2i” :

Sur la figure [3.4] sont représentés tous les graphes décrivant le vertex au premier ordre. Par analogie avec ce qui a été fait dans le chapitre précédent page 59, le graphe “BHV2i” représente une des corrections de vertex au graphe Bethe-Heitler “BHi” tandis que le graphe “CT-BHV2i” illustre le contre-terme associé à “BHV2i” que nous devons déterminer.

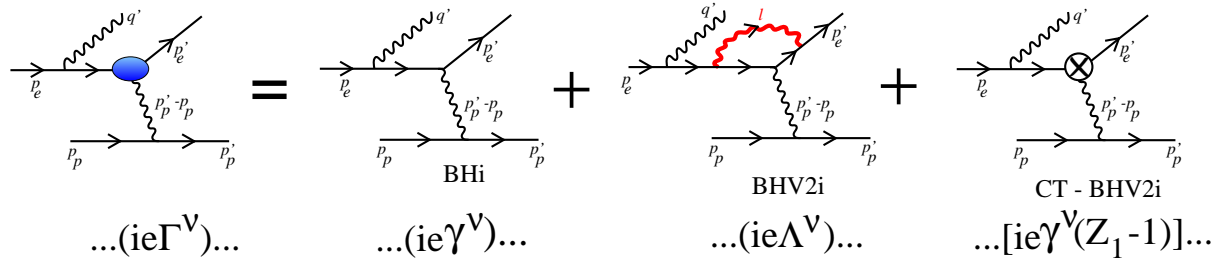


Figure 3.4 - *Description du vertex électron-photon au premier ordre. Λ^ν représente la correction de vertex telle que définie dans le chapitre 2 page 59. Le dernier graphe (CT-BHV2i) illustre le contre-terme associé à BHV2i.*

Notre tâche est ici largement simplifiée puisqu’on rappelle que le terme divergent que nous avons choisi d’isoler (3.10) est identique à celui que nous avons déjà traité dans le chapitre précédent page 59. Par conséquent, en référence à la page 72, on écrit le contre-terme $(Z_1 - 1)$:

$$(Z_1 - 1) = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] + 2 \left[\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] + 4 \right\} + \mathcal{O}(e^4) \quad (3.18)$$

Le contre-terme étant connu, l’amplitude $\mathcal{M}_{CT-BHV2i}$, associée au graphe “CT-BHV2i” (figure [3.4]), s’exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{CT-BHV2i} &= \mathcal{M}_{BHi}(Z_1 - 1) \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{BHi} \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} + 2 \frac{1}{\varepsilon_{IR}} + 4 \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

avec \mathcal{M}_{BHi} l'amplitude Bethe-Heitler et $\left[\frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} = \frac{1}{\epsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2}\right)\right]$.

En ajoutant la contribution du graphe contre-terme dans (3.17), on constate que les termes divergents ultraviolets s'annulent mais qu'il subsiste un terme divergent infrarouge issu du contre-terme. Finalement, après renormalisation, l'amplitude associée au graphe "BHV2i" devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV2i} = & \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[-\frac{2}{\bar{\epsilon}_{IR}} - 3 - v \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) \right] \mathcal{M}_{BHi} \\ & + \frac{i e^4}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \left[\frac{i}{(4\pi)^2} T_{anal}^{BHV2i \nu} + \mathcal{I}_{conv.1}^\nu + \mathcal{I}_{conv.2}^\nu \right] \\ & \cdot \frac{(\not{p}_e - \not{q}' + m_e)}{-2 p_e \cdot q'} \not{q}' u(p_e, s_e) \end{aligned} \quad (3.20)$$

On trouvera l'expression développée de (3.20) dans l'annexe E page 264. Cette expression présente les différentes intégrales sur les paramètres de Feynman que nous traiterons numériquement, cf. page 101.

Les autres graphes :

Faisons le bilan des divergences qui apparaissent dans les amplitudes de tous les graphes considérés (figure [3.2]) et notons si ces amplitudes comportent des termes divergents infrarouges qu'il faudra prendre en compte pour vérifier la compensation.

- **Classe I:**

Les intégrales figurant dans les amplitudes associées aux graphes, "BVi" et "BVf" sont divergentes dans les limites infrarouge et ultraviolette. Par la suite, après régularisation et renormalisation, les amplitudes relatives à ces deux graphes comportent des termes divergents infrarouges. En tenant compte de la modification du courant hadronique, le traitement de ces deux graphes est tout à fait analogue à celui mené pour le graphe de correction de vertex dans le chapitre 2. On souligne que les amplitudes s'expriment en fonction de l'amplitude de Born qui se factorise tout comme l'amplitude Bethe-Heitler pour les graphes de la classe II.

Les graphes "BHSi" et "BHSf" ne présentent qu'une divergence ultraviolette. La renormalisation fait apparaître des termes divergents infrarouges.

Tous les graphes de correction à la polarisation du vide ("BPi", "BPf", "BHPi", "BHPf") sont convergents dans la limite infrarouge mais comportent une divergence ultraviolette nécessitant une renormalisation. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, l'ajout du contre-terme a pour effet d'annuler les termes divergents ultraviolets sans générer de termes divergents infrarouges.

- **Classe II:**

En premier lieu, notons que les graphes "BHV3i" et "BHV3f" ne présentent aucune divergence dans la limite ultraviolette. Par suite, ces deux graphes ne requièrent pas de renormalisation. Tous deux comportent par contre une divergence dans la limite

infrarouge. Les expressions complètes des amplitudes associées à ces deux graphes sont présentées dans l'annexe E pages 268 et 270.

Outre “BHV2i”, les graphes “BHV1i”, “BHV1f” et “BHV2f” nécessitent une re-normalisation car leur amplitude comporte une intégrale divergente dans la limite ultraviolette. On souligne que ces quatre graphes ne présentent pas de divergence dans la limite infrarouge mais que les contre-terms qui leur sont associés contiennent des termes divergents infrarouges qu'il faut prendre en compte lors de la vérification du processus de compensation. Les expressions complètes des amplitudes relatives à ces graphes figurent dans l'annexe E pages 260, 262 et 266.

Avant d'expliquer la méthode d'intégration numérique que nous avons adoptée pour le calcul des effets radiatifs virtuels, nous allons nous intéresser aux corrections radiatives réelles puis vérifier que les termes divergents infrarouges se compensent exactement.

3.3 Corrections radiatives réelles

Dans le cadre des hypothèses fixées au paragraphe 3.1 page 86, l'ensemble des graphes d'ordre α^2 à prendre en compte pour le calcul des effets radiatifs réels est présenté sur la figure [3.5]. Ces graphes contribuent à l'ordre α^4 au niveau de la section efficace. Afin de différencier les deux photons réels émis, on a représenté en gras le photon “dur VCS” d'énergie q' et en trait plus fin le photon “mou” rayonné d'énergie $l \ll q'$. Nous reviendrons en fin de chapitre sur la limite des qualificatifs “dur” et “mou” pour certaines cinématiques de diffusion Compton virtuelle, cf. page 116.

On remarque que dans les graphes BH2i et BH2f le photon réel supplémentaire est émis par un électron hors couche de masse. Après comparaison des propagateurs intervenant dans les amplitudes des graphes BH2i, BH1i d'une part et BH2f, BH3f d'autre part, on montre dans l'annexe E page 271 qu'il est légitime de négliger les graphes BH2i et BH2f devant les huit autres graphes. Dans la limite des photons mous, la correction relative aux graphes BH2i et BH2f est fonction de la coupure expérimentale en énergie via un terme quadratique $(\frac{\Delta E}{E})^2$. Les huit autres graphes conduisent à une correction dont la dépendance en $\frac{\Delta E}{E}$ est logarithmique, ce qui implique qu'ils soient dominants.

Le calcul des effets radiatifs réels est tout à fait semblable à celui effectué pour la diffusion élastique. Contrairement au chapitre 2 où les résultats présentés correspondaient à la limite¹ $Q^2 \gg m_e^2$, nous utilisons ici la formule complète qui figure dans l'article [81] :

$$\left(\frac{d\sigma^{BH+Born}}{d\Omega_{e'}} \right)_{Bi} = \left(\frac{d\sigma^{BH+Born}}{d\Omega_{e'}} \right) \left\{ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[-\frac{2}{\varepsilon_{IR}} \right] \left[\frac{v^2+1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) - 2 \right] + \delta_R \right\} \quad (3.21)$$

avec Bi pour Bremsstrahlung interne et $v^2 = 1 + 4\frac{m_e^2}{Q^2}$.

1. $\frac{v^2+1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \xrightarrow{Q^2 \gg m_e^2} \ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right)$

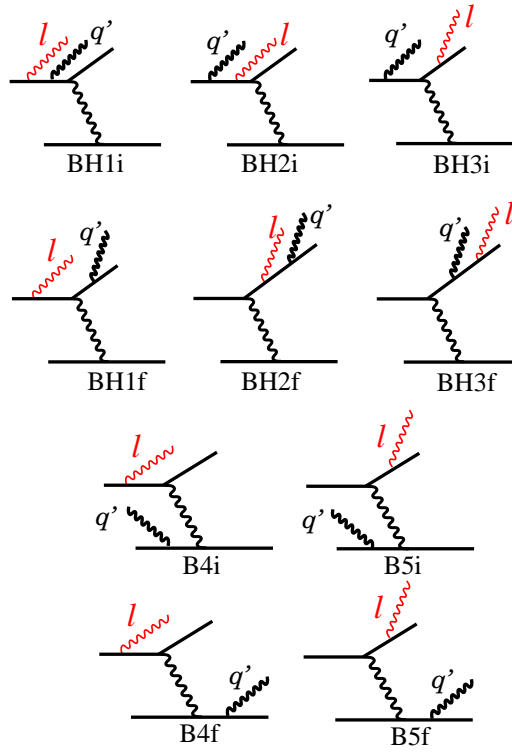


Figure 3.5 - Graphes associés aux effets radiatifs réels. Le photon “dur VCS” est représenté en gras et le photon “mou” rayonné en trait plus fin. Les graphes, BH2i et BH2f sont négligés.

δ_R constitue, après compensation des termes divergents infrarouges, la correction finie liée aux effets radiatifs réels. δ_R est un terme analytique dépendant de la cinématique et de la coupure expérimentale ΔE_{cut} . On se reportera au chapitre 2 page 78 équation (2.96) pour son expression dans la limite $Q^2 \gg m_e^2$ et à l'article [81] pour son expression complète. Ce n'est que dans la dernière partie de ce chapitre, consacrée à l'application des corrections radiatives aux données expérimentales, que nous décrirons comment est prise en compte la correction finie δ_R (page 115).

A ce stade, nous avons isolé et identifié tous les termes divergents infrarouges issus des effets radiatifs virtuels et réels. Il est donc crucial de vérifier qu'il s'opère bien une compensation entre ces deux contributions pour que la correction reste finie.

3.4 Compensation infrarouge

Comme pour la diffusion élastique page 76, on doit vérifier que les termes divergents infrarouges issus des effets radiatifs virtuels se compensent exactement avec ceux provenant des effets radiatifs réels.

Soit \mathcal{M}_V^F et \mathcal{M}_V^{IR} (resp. δ_R^F et δ_R^{IR}) les contributions finie et infrarouge des effets radiatifs virtuels (resp. réels). On peut alors réécrire la formule générale (3.2) de la page

88 sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{ray.}^{BH+Born} = \sigma^{BH+Born} &+ 2 \mathcal{R}e \left[(\mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born})^* \cdot (\mathcal{M}_V^F + \mathcal{M}_V^{IR}) \right] \\ &+ \left| \mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born} \right|^2 (\delta_R^F + \delta_R^{IR}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

où $\sigma_{ray.}^{BH+Born}$ est la section efficace ‘‘Bethe-Heitler+Born’’ incluant les effets radiatifs internes réels et virtuels.

A partir de (3.22), nous voulons vérifier que :

$$2 \mathcal{R}e \left[(\mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born})^* \cdot \mathcal{M}_V^{IR} \right] + \left| \mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born} \right|^2 \delta_R^{IR} \equiv 0 \quad (3.23)$$

Contribution infrarouge des effets radiatifs virtuels :

Sont récapitulés sur la figure [3.6] tous les graphes relatifs aux effets radiatifs virtuels présentant des termes divergents infrarouges. A droite de chaque couple de graphe figure le terme divergent infrarouge qui leur est associé.

En faisant la somme de tous les termes divergents infrarouges répertoriés sur la figure [3.6], on obtient :

$$\mathcal{M}_V^{IR} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} [\mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born}] \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon_{IR}}} \right] \left[\frac{v^2 + 1}{v} \ln \left(\frac{v + 1}{v - 1} \right) - 2 \right] \quad (3.24)$$

D’après (3.22), la contribution infrarouge totale associée aux effets radiatifs virtuels s’écrit :

$$2 \mathcal{R}e \left[(\mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born})^* \cdot \mathcal{M}_V^{IR} \right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left| \mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born} \right|^2 \left[\frac{2}{\overline{\varepsilon_{IR}}} \right] \left[\frac{v^2 + 1}{v} \ln \left(\frac{v + 1}{v - 1} \right) - 2 \right] \quad (3.25)$$

Contribution infrarouge des effets radiatifs réels :

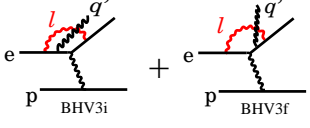
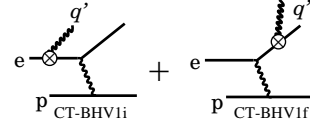
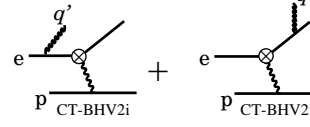
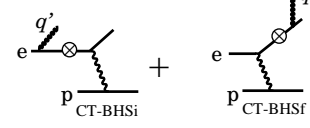
La contribution infrarouge totale \mathcal{M}_R^{IR} associée aux effets radiatifs réels dérive quant à elle directement de (3.21) :

$$\left| \mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born} \right|^2 \delta_R^{IR} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left| \mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born} \right|^2 \left[-\frac{2}{\overline{\varepsilon_{IR}}} \right] \left[\frac{v^2 + 1}{v} \ln \left(\frac{v + 1}{v - 1} \right) - 2 \right] \quad (3.26)$$

Compensation :

En comparant les expressions des contributions infrarouges virtuelles (3.25) et réelles (3.26), on constate que la compensation infrarouge discutée dans le chapitre précédent est bien vérifiée.

Maintenant que nous nous sommes assurés que tous les termes divergents disparaissent, nous pouvons procéder à l’intégration numérique des expressions correspondant aux effets radiatifs virtuels.

	$+$		$+$		$+$		$+$	$\frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{BH} \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{IR}} \right] \frac{v^2 + 1}{v} \ln \left(\frac{v + 1}{v - 1} \right)$ $+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{BH} \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{IR}} \right] (-2)$ $+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{BH} \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{IR}} \right] (-2)$ $+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{BH} \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{IR}} \right] (+2)$ <hr style="width: 100%;"/> $= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{BH} \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{IR}} \right] \left[\frac{v^2 + 1}{v} \ln \left(\frac{v + 1}{v - 1} \right) - 2 \right]$
---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

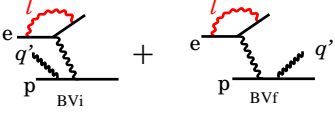
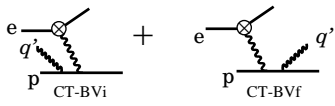
	$+$		$+$	$\frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{Born} \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{IR}} \right] \frac{v^2 + 1}{v} \ln \left(\frac{v + 1}{v - 1} \right)$ $+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{Born} \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{IR}} \right] (-2)$ <hr style="width: 100%;"/> $= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{M}_{Born} \left[\frac{1}{\overline{\varepsilon}_{IR}} \right] \left[\frac{v^2 + 1}{v} \ln \left(\frac{v + 1}{v - 1} \right) - 2 \right]$
---	-----	---	-----	---

Figure 3.6 - Contribution infrarouge des effets radiatifs virtuels.

3.5 Méthode d'intégration

La méthode d'intégration que nous avons mise au point et que je vais décrire ci-après ne concerne que les six graphes de la classe II (cf. figure [3.2]), relatifs aux effets radiatifs virtuels et pour lesquels nous avons eu recours à la méthode d'addition-soustraction développée précédemment. Les autres graphes de la figure [3.2] conduisent à des termes analytiques que l'on peut directement écrire dans un programme.

Après addition-soustraction d'un terme habilement choisi pour compenser les termes divergents, les amplitudes associées aux six graphes de la classe II comportent un terme analytique, résultat de l'intégrale divergente, et une ou deux intégrales à réaliser sur le quadrimoment l du photon virtuel émis puis réabsorbé. Grâce à la paramétrisation de Feynman (cf. page 63), nous transformons l'intégrale sur l en intégrales sur des paramètres de Feynman dont le nombre est fonction du nombre de facteurs dans le dénominateur initial. Les expressions complètes associées aux six graphes considérés sont présentées dans l'annexe E page 260 et suivantes. Tous les graphes comportent une triple intégrale et quatre d'entre eux, "BHV1i", "BHV1f", "BHV2i" et "BHV2f" présentent en plus une double intégrale. Qu'il soit question d'une triple ou d'une double intégration sur les paramètres de Feynman, on a cherché à effectuer l'intégrale la plus interne analytiquement afin de gagner en précision. Ensuite, étant donné la complexité des expressions à intégrer, fonctions des paramètres de Feynman, nous avons été contraints à procéder à une intégration numérique qu'il a fallu adapter aux comportements violents des fonctions au voisinage des bornes d'intégration.

Nous consacrerons une grande partie de cette section aux procédures adoptées pour la première intégration puis poursuivrons en détaillant la méthode numérique utilisée pour l'intégration sur les autres paramètres de Feynman. Ensuite, nous démontrerons la validité de notre calcul en nous appuyant sur plusieurs tests.

3.5.1 Traitement de l'intégrale la plus interne

Pour choisir la variable sur laquelle nous effectuerons la première intégration il est indispensable d'étudier la fonction à intégrer. Cette étude nous conduit à considérer deux cas distincts :

- les fonctions à intégrer ne présentent pas de pôles dans l'intervalle d'intégration quelle que soit la variable considérée. Ce type de fonction correspond aux graphes "BHV1i", "BHV2i", "BHV3i" pour lesquels le photon réel est émis par l'électron incident.
- les fonctions à intégrer comportent un ou deux pôles dans l'intervalle d'intégration selon la variable choisie. Ce type de fonctions apparaît pour les graphes de correction au processus "Bethe-Heitler" où le photon réel est émis par l'électron diffusé. Ces pôles traduisent la possibilité de propagation d'états intermédiaires sur couche de masse.

Propagation d'états intermédiaires sur couche de masse :

Un moyen simple de mettre en évidence la possible propagation d'états intermédiaires sur couche de masse est de calculer la masse invariante (M_i^2) le long de la propagation de l'électron. Si $M_i^2 > m_e^2$ la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse est possible. En s'appuyant sur la figure [3.2], on constate que cette condition est réalisée chaque fois que le photon réel "VCS" (q') est émis par l'électron diffusé (p_e') avec $(\vec{p}_e', \vec{q}') = 0$. Comme expérimentalement nous choisissons volontairement de nous placer loin des régions cinématiques où le photon réel est émis dans la direction des électrons diffusés, nous savons que la matérialisation de l'électron et du photon virtuel est probable. Mathématiquement, le passage sur couche de masse d'états intermédiaires se manifeste par la présence de pôles dans le propagateur associé. Par suite, les amplitudes de tous les processus autorisant la propagation d'états sur couche de masse comporteront une partie imaginaire. Le signe de cette partie imaginaire est déterminé par la prescription $+i\varepsilon$ introduite au niveau des propagateurs, cf. références ([68], p. 86) et ([83], p. 145). Le calcul de l'amplitude des graphes "BHV1f", "BHV2f" et "BHV3f" implique l'intégration de fonctions comportant des pôles dans l'intervalle $[0,1]$. Cette intégration, réalisée par prolongement analytique dans le plan complexe [84], est détaillée ci-après. On verra qu'il sera astucieux de choisir comme première variable d'intégration celle pour laquelle il n'existe qu'un unique pôle dans l'intervalle $[0,1]$.

On peut vérifier que pour les graphes où le photon "VCS" est émis par l'électron incident $M_i^2 < m_e^2$. Ces graphes n'autorisent pas la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse.

3.5.1.1 Généralités

A partir des expressions présentées dans l'annexe E, on peut montrer que, moyennant quelques développements, la première intégrale peut toujours se ramener à l'un des quatre cas suivants :

- Fonctions "régulières" :

$$\text{type 1} = \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha t + \beta)^n} \quad \text{et} \quad \text{type 2} = \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^n}$$

- Fonctions "singulières" :

$$\text{type 3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha t + \beta \pm i\varepsilon)^n} \quad \text{et} \quad \text{type 4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma \pm i\varepsilon)^n}$$

où t est la variable choisie pour l'intégrale la plus interne. m varie de 0 à 4 selon les cas et n vaut 1 ou 2. α , β et γ sont des fonctions des autres variables d'intégration qui varient de 0 à 1 (paramètres de Feynman).

Pour chaque type de fonction, nous avons cherché à utiliser au maximum des formules analytiques qui nous garantissent une meilleure précision. Nous commencerons par détailler les méthodes que nous avons employées pour l'intégration des fonctions "régulières", c'est-à-dire ne présentant pas de singularité. Ces formules analytiques mises au point par J. Van de Wiele font l'objet du rapport [84].

3.5.1.2 Intégration des fonctions sans singularité

On rencontre ce type de fonctions dans les amplitudes associées aux graphes “BHV1i”, “BHV2i” et “BHV3i” de la figure [3.2]. Alors que le graphe “BHV3i” ne fait intervenir que des intégrales du type 1, les graphes “BHV1i” et “BHV2i” comportent des intégrales du type 1 et du type 2.

• Intégrale de type 1 : $\int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha t + \beta)^n}$

Pour ce type d'intégrale, il existe des formules analytiques que l'on trouve facilement dans les tables d'intégrales telles que ([87], p. 69) ([86], p. 22)... Dans notre cas, comme α et β sont fonctions des autres variables variant de 0 à 1, il est nécessaire de procéder à une étude systématique de la stabilité des formules selon les valeurs de α et β . Cette étude nous a conduit à utiliser trois méthodes distinctes en fonction de la valeur de α/β :

→ $\alpha/\beta \geq 1$, nous adoptons la relation de récurrence (3.27) obtenue en intégrant par partie $\int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha t + \beta)^n}$ et valable pour $(m \geq 1; n \geq 2)$:

$$\int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha t + \beta)^n} = -\frac{1}{\alpha(n-1)} \left[\frac{t^m}{(\alpha t + \beta)^{n-1}} \right]_0^1 + \frac{m}{\alpha(n-1)} \int_0^1 \frac{t^{m-1} dt}{(\alpha t + \beta)^{n-1}} \quad (3.27)$$

Pour $(m = 0; n \geq 2)$ et $(m \geq 1; n = 0, 1)$ on se reportera aux tables ([87], p. 69). Si $\alpha/\beta < 1$, nous ne pouvons plus utiliser cette relation de récurrence car elle donne lieu à des instabilités numériques.

→ $0.02 < \alpha/\beta < 1$, seule une méthode d'intégration numérique conduit à des résultats stables dans ce domaine. On utilise la méthode de Gauss-Legendre avec 40 points.

→ $\alpha/\beta < 0.02$, $\int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha t + \beta)^n}$ est évaluée à partir d'un développement de Taylor au voisinage de $\alpha/\beta = 0$:

$$\int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha t + \beta)^n} = \frac{1}{\beta^n} \sum_{j=0}^p C_{n+j-1}^j \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right)^j \left[\frac{t^{m+j+1}}{m+j+1} \right]_0^1 \quad (3.28)$$

On rappelle $C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.

Pour chaque nouveau terme calculé, on évalue $\rho = \frac{\text{Dernier terme}}{\text{Premier terme}}$ et on s'arrête dès que $\rho \leq 10^{-16}$. Quel que soit m et n , on calcule au maximum 9 termes pour $\alpha/\beta < 0.02$.

• Intégrale de type 2 : $\int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^n}$

Comme pour l'intégrale de type 1, on trouve dans la littérature des formules analytiques ([87], p. 81), ([86], p. 38) dont nous nous sommes inspirés. Ici aussi nous avons été confrontés au problème d'instabilité numérique pour des valeurs particulières des coefficients α , β et γ fonctions des autres variables d'intégration. En fonction de la valeur de α/γ :

→ $\alpha/\gamma \geq 1$, nous utilisons telles quelles les formules analytiques 2.172 et suivantes de la référence [87].

→ $0.02 < \alpha/\gamma < 1$, nous intégrons numériquement $\int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^n}$ par la méthode de Gauss-Legendre avec 40 points dans l'intervalle $[0,1]$.

→ $\alpha/\gamma \leq 0.02$, nous avons recours à un développement de Taylor au voisinage de $\alpha = 0$:

$$\int_0^1 \frac{t^m dt}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} = \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^1 \frac{t^m dt}{\frac{\beta}{\gamma} t + 1} + \sum_{j=2}^6 \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{j-1} \int_0^1 \frac{t^{2(j-1)+m} dt}{\left(\frac{\beta}{\gamma} t + 1 \right)^j} \right]_0^1 \quad (3.29)$$

$$\int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2} = \frac{1}{\gamma^2} \left[\int_0^1 \frac{t^m dt}{\left(\frac{\beta}{\gamma} t + 1 \right)^2} + \sum_{j=3}^6 \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{j-2} (j-1) \int_0^1 \frac{t^{2(j-2)+m} dt}{\left(\frac{\beta}{\gamma} t + 1 \right)^j} \right]_0^1 \quad (3.30)$$

On se limite aux formules correspondant à $n = 1, 2$ car ce sont les deux seuls cas dont nous avons besoin. On remarque dans (3.29) et (3.30) la présence d'intégrales de type 1 : $\int_0^1 \frac{t^m dt}{\left(\frac{\beta}{\gamma} t + 1 \right)^j}$.

Graphes “BHV3i” :

A partir de l'expression de l'amplitude (E.41) reportée dans l'annexe E page 268, on peut montrer qu'une décomposition selon x_3 permet de se ramener à des intégrales de type 1 uniquement. Soit \mathcal{I}_{BHV3i} l'intégrale à évaluer :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{BHV3i} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \left[\mathcal{A}_1^1 \int_0^1 \frac{x_3}{R} dx_3 + \mathcal{A}_1^2 \int_0^1 \frac{x_3^2}{R} dx_3 \right. \\ \left. + \mathcal{A}_2^1 \int_0^1 \frac{x_3}{R^2} dx_3 + \mathcal{A}_2^2 \int_0^1 \frac{x_3^2}{R^2} dx_3 + \mathcal{A}_2^3 \int_0^1 \frac{x_3^3}{R^2} dx_3 \right] \quad (3.31) \end{aligned}$$

avec $R = A_{3i} x_3 + B_{3i}$. Les coefficients \mathcal{A}_i^j sont des fonctions de x_1, x_2 , de variables cinématiques et de matrices de Dirac. Les coefficients A_{3i} et B_{3i} sont fonctions de x_1, x_2 et de variables cinématiques.

Graphes “BHV1i” et “BHV2i” :

Qu'il s'agisse du graphe “BHV1i” ou “BHV2i”, pour l'intégrale la plus interne, les fonctions à intégrer sont les mêmes. A partir des expressions des amplitudes reportées en annexe E page 260 et 264, on peut montrer que la partie comportant des intégrales ($\mathcal{I}_{BHV1,2i}$) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{BHV1,2i} = \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_2 \left[\mathcal{B}_1^0 \int_0^1 \frac{dx_1}{Z} + \mathcal{B}_1^1 \int_0^1 \frac{x_1}{Z} dx_1 + \mathcal{B}_1^2 \int_0^1 \frac{x_1^2}{Z} dx_1 \right. \\ \left. + \mathcal{B}_2^1 \int_0^1 \frac{x_1}{Z^2} dx_1 + \mathcal{B}_2^2 \int_0^1 \frac{x_1^2}{Z^2} dx_1 + \mathcal{B}_2^3 \int_0^1 \frac{x_1^3}{Z^2} dx_1 \right] \\ + \int_0^1 dx_2' \left[\mathcal{C}_1^0 \int_0^1 \frac{dx_1'}{T} + \mathcal{C}_1^1 \int_0^1 \frac{x_1' dx_1'}{T} \right] \quad (3.32) \end{aligned}$$

où :

$$Z = A_{1,2i} x_1^2 + B_{1,2i} x_1 + C_{1,2i} \text{ commun pour les deux graphes,}$$

$T = A_i x'_1 + B_i$ avec A_i et B_i différents selon qu'il est question du graphe "BHV1i" ou du graphe "BHV2i". En référence à l'annexe E, pour le graphe "BHV1i", $x'_1 = x$ et pour le graphe "BHV2i", $x'_1 = y$.

De plus, les coefficients \mathcal{B}_i^j et \mathcal{C}_i^j sont différents suivant le graphe considéré. On souligne que ces coefficients \mathcal{B}_i^j et \mathcal{C}_i^j sont dépendants des autres variables d'intégration (x_3 et x_2 ici) ainsi que de variables cinématiques et contiennent des matrices de Dirac. Les $A_{1,2i}$, $B_{1,2i}$, $C_{1,2i}$, A_i et B_i sont fonctions de x_3 , x_2 et de variables cinématiques. Le choix de x_1 et x'_1 comme premières variables d'intégration est motivé par le fait que la valeur maximum de m est minimale dans ce cas. Pour l'intégrale double par exemple, si on permutait l'ordre d'intégration (x_2 et x_1), on aurait à calculer une intégrale du type 2 alors qu'avec l'ordre que nous utilisons il ne s'agit que du type 1, plus simple.

3.5.1.3 Intégration des fonctions singulières

On rencontre ce type de fonctions dans les amplitudes associées aux graphes "BHV1f", "BHV2f" et "BHV3f" de la figure [3.2]. On rappelle que, dans ces trois graphes, le photon réel est émis par l'électron diffusé et que l'électron et le photon ont la possibilité de se propager sur couche de masse. Mathématiquement, ceci se traduit par la présence de pôle(s) dans les propagateurs et donc dans les fonctions à intégrer. Que les intégrales soient du type 3 ou du type 4, nous les avons calculées exclusivement à partir de formules analytiques. Ces formules ont été développées spécialement et font l'objet du rapport [84] auquel nous nous référerons souvent. Nous avons choisi la première variable d'intégration de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul pôle dans le domaine d'intégration. Néanmoins, notre algorithme traite le cas où deux pôles, de partie réelle distincte, appartiennent à l'intervalle d'intégration. On a vérifié qu'aucun pôle ne peut apparaître aux bornes d'intégration. Je commencerai par exposer comment sont traitées les intégrales de type 3 et montrerai ensuite que les intégrales de type 4 se ramènent en fait à des intégrales de type 3.

• Intégrale de type 3 : $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha' t + \beta' \pm i\varepsilon')^n}$

Dans le cadre de notre calcul, on se limite aux cas $n = 1$ et $n = 2$.

→ Cas $n = 1$:

On factorise α' pour se ramener au calcul de :

$$\mathcal{I}_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{t - t_0 \pm i\varepsilon} = \alpha' \left[\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{\alpha' t + \beta' \pm i\varepsilon'} \right] \quad (3.33)$$

où $t_0 = -\frac{\beta'}{\alpha'}$ représente le pôle et $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\alpha'|}$. On souligne que si α' est négatif il faut inverser le signe de la partie imaginaire dans (3.33). Considérons $\alpha' > 0$.

En multipliant le numérateur et le dénominateur de (3.33) par $(t - t_0 \mp i\varepsilon)$, on sépare la partie réelle de la partie imaginaire :

$$\mathcal{I}_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{(t - t_0) t^m dt}{t^2 + \varepsilon^2} \mp i\varepsilon \int_0^1 \frac{t^m dt}{t^2 + \varepsilon^2} \quad (3.34)$$

En procédant au changement de variable $z = t - t_0$, on montre dans l'annexe D page 253 que l'intégrale de type 3, $n = 1$, s'évalue à partir de la formule analytique suivante :

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} J_{k+1} \mp i \pi t_0^m \quad (3.35)$$

avec :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1 - t_0)^2}{t_0^2} \right] \\ J_k &= \frac{1}{(k-1)} \left[(1 - t_0)^{k-1} - (-t_0)^{k-1} \right] \quad (k \geq 2) \\ C_m^k &= \frac{m!}{k! (m-k)!} \end{aligned}$$

Finalement, pour $n = 1$, on utilise :

$$\alpha' > 0 \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{\alpha' t + \beta' \pm i \varepsilon'} = \frac{\mathcal{I}_1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'} \left[\sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} J_{k+1} \mp i \pi t_0^m \right] \quad (3.36)$$

$$\alpha' < 0 \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{\alpha' t + \beta' \pm i \varepsilon'} = \frac{\mathcal{I}_1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'} \left[\sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} J_{k+1} \pm i \pi t_0^m \right] \quad (3.37)$$

→ Cas $n = 2$:

Ici aussi on commence par factoriser α' dans $\alpha' t + \beta' \pm \varepsilon'$. On se ramène alors au calcul de \mathcal{I}_2 :

$$\mathcal{I}_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(t - t_0 \pm i \varepsilon)^2} = \alpha'^2 \left[\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha' t + \beta' \pm i \varepsilon')^2} \right] \quad (3.38)$$

où $t_0 = -\frac{\beta'}{\alpha'}$ représente le pôle et $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\alpha'|}$. On souligne que si α' est négatif il faut inverser le signe de la partie imaginaire dans (3.38). On considère $\alpha' > 0$.

On multiplie ensuite le numérateur et le dénominateur de (3.38) par $(t - t_0 \mp i \varepsilon)^2$ afin de séparer la partie réelle de la partie imaginaire. On a :

$$\mathcal{I}_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^1 \frac{t^m [(t - t_0)^2 - \varepsilon^2] dt}{[(t - t_0)^2 + \varepsilon^2]^2} \mp 2i \int_0^1 \frac{t^m [\varepsilon(t - t_0)] dt}{[(t - t_0)^2 + \varepsilon^2]^2} \right] \quad (3.39)$$

Après changement de variable ($z = t - t_0$), on obtient :

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} I_k \mp i \pi m t_0^{m-1} \quad (3.40)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{1}{t_0} - \frac{1}{1 - t_0} & I_1 &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1 - t_0)^2}{t_0^2} \right] \\ I_k &= \frac{1}{k-1} \left[(1 - t_0)^{k-1} - (-t_0)^{k-1} \right] & n &\geq 2 \end{aligned}$$

On trouvera des détails concernant la dérivation de la formule (3.40) dans l'annexe D page 255. Pratiquement, pour $n = 2$, on utilise les formules analytiques suivantes :

$$\alpha' > 0 \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha' t + \beta' \pm i\varepsilon')^2} = \frac{1}{\alpha'^2} \left[\sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} I_k \mp i \pi t_0^{m-1} \right] \quad (3.41)$$

$$\alpha' < 0 \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha' t + \beta' \pm i\varepsilon')^2} = \frac{1}{\alpha'^2} \left[\sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} I_k \pm i \pi t_0^{m-1} \right] \quad (3.42)$$

• Intégrale de type 4: $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma' \pm i\varepsilon')^n}$

En factorisant α' dans $(\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma' \pm i\varepsilon')$, on se ramène au calcul de l'intégrale \mathcal{I}_n :

$$\mathcal{I}_n = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(t^2 + \beta t + \gamma \pm i\varepsilon)^n} = \alpha'^n \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma' \pm i\varepsilon')^n} \quad (3.43)$$

avec :

$$\beta = \frac{\beta'}{\alpha'} \quad \gamma = \frac{\gamma'}{\alpha'} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\alpha'|} \quad (3.44)$$

Comme précédemment, si $\alpha' < 0$, nous devons penser à inverser le signe de la partie imaginaire dans (3.43). Dans la suite, $\alpha' > 0$.

En se reportant à l'annexe D page 256, on écrit \mathcal{I}_n sous la forme :

$$\mathcal{I}_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(t^2 + \beta t + \gamma \pm i\varepsilon)^n} = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(t - t_+^R \pm i\tilde{\varepsilon})^n (t - t_-^R \mp i\tilde{\varepsilon})^n} \quad (3.45)$$

avec $t_+^R \mp i\tilde{\varepsilon}$ et $t_-^R \pm i\tilde{\varepsilon}$ les deux valeurs complexes qui annulent $t^2 + \beta t + \gamma \pm i\varepsilon$.

On décompose ensuite $\frac{1}{(t - t_+^R \pm i\tilde{\varepsilon})^n (t - t_-^R \mp i\tilde{\varepsilon})^n}$ en éléments simples et on obtient pour $n = 1$ et $n = 2$ les formules suivantes :

→ Cas $n = 1$:

$$\alpha' > 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma} = \frac{1}{\alpha' \sqrt{\delta}} \left[\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_+^R \pm i\tilde{\varepsilon}} - \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_-^R \mp i\tilde{\varepsilon}} \right] \quad (3.46)$$

$$\alpha' < 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma} = \frac{1}{\alpha' \sqrt{\delta}} \left[\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_+^R \mp i\tilde{\varepsilon}} - \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_-^R \pm i\tilde{\varepsilon}} \right] \quad (3.47)$$

→ Cas $n = 2$:

$$\alpha' > 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma)^2} = \frac{1}{\alpha'^2 \delta} \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[\int_0^1 \frac{t^m dt}{(t - t_+^R \pm i\tilde{\varepsilon})^2} + \int_0^1 \frac{t^m dt}{(t - t_-^R \mp i\tilde{\varepsilon})^2} \right] \\ + \frac{2}{\alpha'^2 \delta^{3/2}} \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[\int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_-^R \mp i\tilde{\varepsilon}} - \int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_+^R \pm i\tilde{\varepsilon}} \right] \quad (3.48)$$

$$\alpha' < 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma)^2} = \frac{1}{\alpha'^2 \delta} \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[\int_0^1 \frac{t^m dt}{(t - t_+^R \mp i\tilde{\varepsilon})^2} + \int_0^1 \frac{t^m dt}{(t - t_-^R \pm i\tilde{\varepsilon})^2} \right] \\ + \frac{2}{\alpha'^2 \delta^{3/2}} \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[\int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_-^R \pm i\tilde{\varepsilon}} - \int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_+^R \mp i\tilde{\varepsilon}} \right] \quad (3.49)$$

On constate que le calcul des intégrales de type 4 (formules 3.46 et 3.48) se ramène finalement au calcul d'intégrales de type 3 traitées précédemment.

Dans notre calcul, nous ne sommes jamais confrontés au cas particulier $t_-^R = t_+^R$, c'est-à-dire où les deux pôles auraient la même partie réelle. Néanmoins, on signale que ce cas est traité dans le rapport [84].

Bien que les formules établies précédemment traitent l'existence de deux pôles ayant des parties réelles distinctes dans l'intervalle d'intégration, nous choisissons toujours la première variable d'intégration de telle sorte qu'il n'existe qu'un seul pôle dans l'intervalle $[0,1]$.

A titre de contrôle, nous avons comparé les résultats obtenus d'une part avec ces formules analytiques et d'autre part avec une méthode numérique dans le plan complexe². Cette comparaison a confirmé l'excellente précision des formules analytiques et a mis en évidence la limitation de la méthode numérique lorsque le pôle se situait près des bornes d'intégration.

Cette première intégration par prolongement analytique dans le plan complexe conduit à un résultat comportant une partie réelle et une partie imaginaire finies. L'intégration de ce résultat entre 0 et 1 sur les autres paramètres de Feynman ne présentera alors aucune difficulté particulière.

Graphe BHV3f:

A partir de l'expression de l'amplitude (E.49) reportée dans l'annexe E page 270, on peut montrer qu'une décomposition selon x_3 permet de se ramener à des intégrales de

2. Intégration par la méthode de Gauss-Legendre sur un demi-cercle de rayon 1/2 centré en (1/2,0). Ne considérant que les cas où il n'y a qu'un seul pôle dans l'intervalle d'intégration $[0,\pi]$, on sait à partir du signe de sa partie imaginaire où il se situe par rapport à l'axe réel. On fait en sorte que le demi-cercle ne contienne pas le pôle pour s'affranchir du calcul du résidu. On utilise 150 points de Gauss entre 0 et π .

type 3 uniquement. Soit \mathcal{I}_{BHV3f} l'intégrale à évaluer :

$$\mathcal{I}_{BHV3f} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \left[\mathcal{A}'_1 \int_0^1 \frac{x_3}{R'} dx_3 + \mathcal{A}'_1 \int_0^1 \frac{x_3^2}{R'} dx_3 \right. \\ \left. + \mathcal{A}'_2 \int_0^1 \frac{x_3}{R'^2} dx_3 + \mathcal{A}'_2 \int_0^1 \frac{x_3^2}{R'^2} dx_3 + \mathcal{A}'_2 \int_0^1 \frac{x_3^3}{R'^2} dx_3 \right] \quad (3.50)$$

avec $R' = A_{3f} x_3 + B_{3f} - i\varepsilon$. Les coefficients \mathcal{A}'_i sont des fonctions de x_1, x_2 , de variables cinématiques et de matrices de Dirac. Les coefficients A_{3f} et B_{3f} sont fonctions de x_1, x_2 et de variables cinématiques.

Graphes “BHV1f” et “BHV2f” :

Qu'il s'agisse du graphe “BHV1f” ou “BHV2f”, pour l'intégrale la plus interne, les fonctions à intégrer sont les mêmes. A partir des expressions des amplitudes reportées en annexe E page 262 et 266, on peut montrer qu'un développement selon x_2 conduit à ce qu'il n'apparaisse qu'un seul pôle entre 0 et 1. Dans ces conditions, la partie comportant des intégrales ($\mathcal{I}_{BHV1,2f}$) se met sous la forme :

$$\mathcal{I}_{BHV1,2f} = \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_1 \left[\mathcal{B}'_1 \int_0^1 \frac{x_2}{Z'} dx_2 + \mathcal{B}'_1 \int_0^1 \frac{x_2^2}{Z'} dx_2 \right. \\ \left. + \mathcal{B}'_2 \int_0^1 \frac{x_2}{Z'^2} dx_2 + \mathcal{B}'_2 \int_0^1 \frac{x_2^2}{Z'^2} dx_2 + \mathcal{B}'_2 \int_0^1 \frac{x_2^3}{Z'^2} dx_2 + \mathcal{B}'_2 \int_0^1 \frac{x_2^4}{Z'^2} dx_2 \right] \\ + \int_0^1 dx'_2 \left[\mathcal{C}'_1 \int_0^1 \frac{dx'_1}{T'} + \mathcal{C}'_1 \int_0^1 \frac{x'_1 dx'_1}{T'} \right] \quad (3.51)$$

où :

$$Z' = A_{1,2f} x_2^2 + B_{1,2f} x_2 + C_{1,2f} - i\varepsilon \text{ commun pour les deux graphes,}$$

$T' = A_i x_1 + B_i$ avec A_i et B_i différents selon qu'il est question du graphe “BHV1f” ou du graphe “BHV2f”. En référence à l'annexe E, pour le graphe “BHV1f”, $x_1 = x$ tandis que pour le graphe “BHV2f”, $x_1 = y$.

De plus, les coefficients \mathcal{B}'_i et \mathcal{C}'_i sont différents suivant le graphe considéré. On souligne que les coefficients $\mathcal{B}'_i, \mathcal{C}'_i$ sont dépendants des autres variables d'intégration (x_1 et x_3 ici) ainsi que de variables cinématiques et contiennent des matrices de Dirac. Les $A_{1,2i}, B_{1,2i}, C_{1,2i}, A_i$ et B_i sont fonctions de x_3, x_2 et de variables cinématiques. Pour l'intégrale double, si on inversait x_2 et x_1 , on aurait à calculer une intégrale du type 4.

3.5.2 Intégration numérique

Il nous reste maintenant à intégrer sur les autres paramètres de Feynman le résultat issu de la première intégration. Puisque nous avons traité les pôles dans le plan complexe, les fonctions qu'il reste à intégrer ne comportent plus de singularité. Ces fonctions régulières des paramètres de Feynman restants sont si compliquées que nous avons opté pour un traitement purement numérique utilisant la méthode de Gauss-Legendre.

Afin de contrôler au maximum la précision de l'intégration numérique pour chaque graphe, nous avons d'abord étudié le comportement de chacun des intégrants en fonction des paramètres de Feynman. Cette étude a montré :

- que les intégrants présentaient un comportement très piqué au voisinage des bornes d'intégration, c'est-à-dire près de 0 et de 1. Ces variations violentes près de chacune des bornes d'intégration sévissent sur un intervalle caractéristique en m_e/E (E : énergie du faisceau; Mayence : $m_e/E \simeq 6.10^{-4}$; Jefferson Lab. : $m_e/E \simeq 1.6.10^{-4}$).
- que les intégrants variaient lentement en dehors du voisinage immédiat des bornes d'intégration.

Suite à cette étude, nous avons découpé l'intervalle d'intégration $[0,1]$ en tranches de façon à tenir compte du comportement violent des intégrants. Dans chacune des tranches, nous avons ajusté le nombre de points de Gauss pour obtenir une convergence à mieux que 10^{-8} près³ pour chacune des intégrations. On souligne qu'il est très important de bien contrôler la convergence des résultats à chaque étape car l'imprécision numérique se trouve amplifiée au niveau du résultat final correspondant à la somme cohérente des amplitudes des graphes considérés pour les corrections radiatives virtuelles.

La figure (3.7) témoigne de la convergence de nos résultats lorsqu'on augmente le nombre de tranches et le nombre de points par tranche. Cette figure correspond à une des cinématiques qui sera réalisée à Jefferson Lab. Les tranches que nous avons utilisées pour les 3 scénarios (8, 10 et 14 tranches) sont présentées dans le tableau (3.1).

	14 tranches	10 tranches	8 tranches
1	$[0, 10^{-12}]$	$[0, 10^{-7}]$	$[0, 10^{-7}]$
2	$[10^{-12}, 10^{-9}]$	$[10^{-7}, 10^{-5}]$	$[10^{-7}, 10^{-4}]$
3	$[10^{-9}, 10^{-6}]$	$[10^{-5}, 10^{-3}]$	$[10^{-4}, 10^{-1}]$
4	$[10^{-6}, 10^{-4}]$	$[10^{-3}, 10^{-1}]$	$[10^{-1}, 0.5]$
5	$[10^{-4}, 10^{-2}]$	$[10^{-1}, 0.5]$	$[0.5, 0.9]$
6	$[10^{-2}, 0.1]$	$[0.5, 0.9]$	$[0.9, 1. - 10^{-4}]$
7	$[0.1, 0.5]$	$[0.9, 1. - 10^{-3}]$	$[1. - 10^{-4}, 1. - 10^{-7}]$
8	$[0.5, 0.9]$	$[1. - 10^{-3}, 1. - 10^{-5}]$	$[1. - 10^{-7}, 1]$
9	$[0.9, 1. - 10^{-2}]$	$[1. - 10^{-5}, 1. - 10^{-7}]$	
10	$[1. - 10^{-2}, 1. - 10^{-4}]$	$[1. - 10^{-7}, 1]$	
11	$[1. - 10^{-4}, 1. - 10^{-6}]$		
12	$[1. - 10^{-6}, 1. - 10^{-9}]$		
13	$[1. - 10^{-9}, 1. - 10^{-12}]$		
14	$[1. - 10^{-12}, 1]$		

Tableau 3.1 - *Tranches utilisées pour réaliser la figure (3.7).*

3. Pour contrôler nos résultats, nous avons intégré analytiquement des fonctions qui épousaient le comportement des intégrants près des bornes d'intégration. Par exemple, nous avons comparé le résultat obtenu numériquement et analytiquement pour $\int_0^{10^{-4}} x^{-0.04} dx$

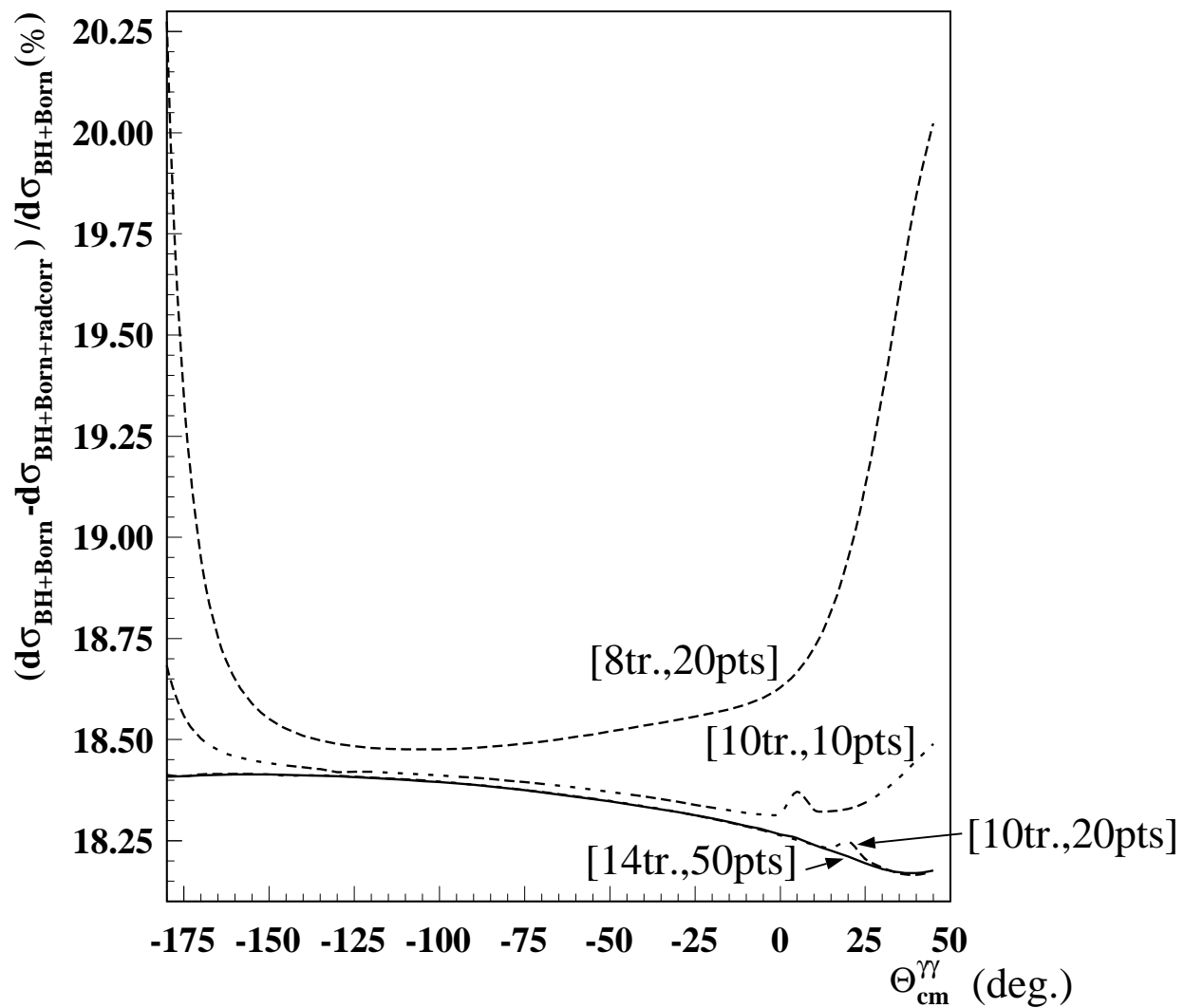


Figure 3.7 - *Etude de la convergence des résultats lorsqu'on augmente le nombre de tranches et le nombre de points par tranche. Les différentes tranches utilisées pour réaliser cette figure sont reportées dans le tableau (3.1). La cinématique VCS considérée correspond à $k=4000\text{MeV}/c$, $k'=3330\text{MeV}/c$, $\theta_{lab}^{ee'} = 15.75^\circ$, $q'=120\text{MeV}/c$, $Q^2=1\text{GeV}^2$, $\varepsilon=0.95$.*

Après les multiples contrôles de convergence, nous avons dû opter pour un compromis entre précision et temps de calcul.

→ Nous avons adopté 10 tranches avec 20 points de Gauss par tranche.

Pour fixer les idées, si on utilise 10 tranches et 20 points par tranche, l'exécution du programme pour une cinématique complète⁴ demande 4h à une unité centrale dont la fréquence du processeur est de 200MHz. Dans les mêmes conditions, pour 10 tranches et 50 points par tranche, il faut 15h et pour 14 tranches et 50 points il faut 20h... A titre de comparaison, le calcul de la section efficace "Bethe-Heitler+Born" ne nécessite que 3 minutes...

3.5.3 Tests significatifs, crédibilité du résultat

1. Pour les graphes comportant une triple intégration, le premier test a consisté à inverser les deux dernières intégrations numériques et à vérifier que ceci ne modifiait en rien le résultat.
2. Deux programmes indépendants ont été élaborés pour ce calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle. D. Lhuillier et moi-même en sommes les auteurs de ces deux programmes. Ces deux programmes utilisent les mêmes routines d'intégration mais la philosophie employée pour la programmation des termes mis en jeu est très différente. Les résultats issus des deux programmes sont identiques à mieux que 10^{-7} près. J'insiste sur le fait qu'étant donné le grand nombre de termes à écrire, l'indépendance des deux programmes a été cruciale pour la crédibilité des résultats.
3. D. Lhuillier [3] a vérifié que l'invariance de jauge était respectée au niveau du photon réel émis ($q'^\mu T_\mu = 0$).
4. Un autre test intéressant a consisté à augmenter la masse de l'électron afin de suivre l'évolution des corrections radiatives virtuelles en fonction de la masse de la particule rayonnante. On retrouve [3] que l'effet des corrections radiatives virtuelles s'atténue nettement lorsque la masse de la particule augmente. Le fait de négliger dans un premier temps les corrections radiatives sur le proton est donc bien légitime.

3.6 Résultats

Le programme que j'ai mis au point s'adapte indifféremment aux cinématiques de Mayence et de Jefferson Lab.. Les résultats que j'ai choisi de présenter dans cette section concernent exclusivement des cinématiques qui seront réalisées dans le hall A à Jefferson Lab. au printemps 1998. On signale que les résultats relatifs aux expériences VCS qui se sont déroulées à Mayence figurent dans la thèse de D. Lhuillier et dans l'article [81].

4. $-180^\circ < \theta_{CM}^{\gamma\gamma} < 50^\circ$ par pas de 5° soit 47 points.

Après estimation de l'erreur systématique due au calcul des corrections radiatives virtuelles sur la section efficace absolue, je décrirai dans les grandes lignes la méthode adoptée actuellement pour corriger les données expérimentales.

Enfin, dans une dernière partie, je présenterai une estimation grossière de la correction radiative totale associée aux cinématiques de Jefferson Lab. considérées.

3.6.1 Effet des corrections radiatives virtuelles

Les trois cinématiques considérées sont présentées dans le tableau (3.2).

Cinématique 1	Cinématique 2	Cinématique 3
$Q^2 = 0.3 \text{ GeV}^2$	$Q^2 = 1. \text{ GeV}^2$	$Q^2 = 2. \text{ GeV}^2$
$s = 1.10 \text{ GeV}^2$	$s = 1.14 \text{ GeV}^2$	$s = 1.10 \text{ GeV}^2$
$k = 845 \text{ MeV}$	$k = 4000 \text{ MeV}$	$k = 4421 \text{ MeV}$
$k' = 539 \text{ MeV}/c$	$k' = 3330 \text{ MeV}/c$	$k' = 3240 \text{ MeV}/c$
$\theta_{lab}^{ee'} = 52.44^\circ$	$\theta_{lab}^{ee'} = 15.75^\circ$	$\theta_{lab}^{ee'} = 21.52^\circ$
$\varepsilon = 0.62$	$\varepsilon = 0.95$	$\varepsilon = 0.89$
$q' = 104. \text{ MeV}$	$q' = 120. \text{ MeV}$	$q' = 104. \text{ MeV}$

Tableau 3.2 - *Trois cinématiques VCS ($s < (M + m_\pi)^2$) qui seront réalisées à Jefferson Lab. dans le hall A.*

L'effet des corrections radiatives virtuelles, calculé pour les trois cinématiques précitées, est représenté en fonction de l'angle $\theta_{CM}^{\gamma\gamma}$ sur la figure [3.8]. Les intégrations numériques sont évaluées par la méthode de Gauss-Legendre en découpant l'intervalle en 10 tranches. Dans chacune de ces tranches on calcule 20 points et poids de Gauss. On souligne que dans ce calcul on a utilisé les facteurs de formes élastiques du proton déterminés par P.E. Bosted [53] à partir de l'ajustement des diverses mesures existantes.

La correction radiative virtuelle δ_V est définie par :

$$\delta_V = - \frac{\sigma_{BH+Born} - \sigma_{BH+Born+radcorr}}{\sigma_{BH+Born}} \quad (3.52)$$

avec $\sigma_{BH+Born+radcorr}$ représentant la section efficace théorique "Bethe-Heitler + Born" incluant les corrections radiatives virtuelles au premier ordre. On rappelle la relation :

$$\sigma_{BH+Born+radcorr} = (1 + \delta_V) \sigma_{BH+Born} \quad (3.53)$$

avec $\sigma_{BH+Born}$ la section efficace théorique.

A partir de la figure [3.8], on constate que, pour une cinématique donnée, la correction radiative virtuelle varie très peu en fonction de l'angle $\theta_{CM}^{\gamma\gamma}$ mais augmente en fonction de Q^2 . En adoptant la notation : (correction \pm variation sur tout le domaine angulaire), on écrit :

$$\text{Cinématique 1 : } \delta_V = -(15.55 \pm 0.10) \%$$

$$\text{Cinématique 2 : } \delta_V = -(18.30 \pm 0.15) \%$$

$$\text{Cinématique 3 : } \delta_V = -(20.24 \pm 0.10) \%$$

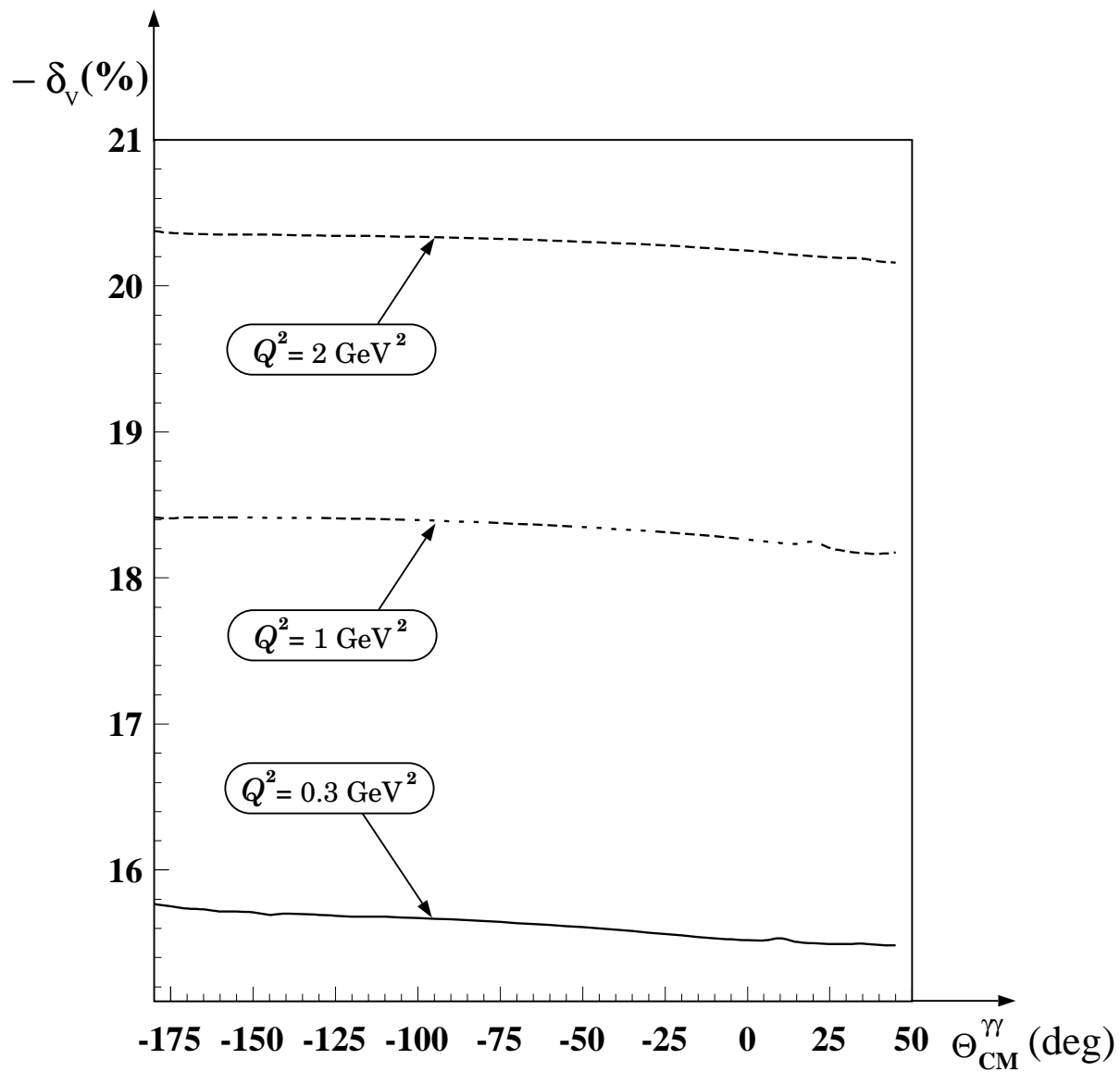


Figure 3.8 - Effet des corrections radiatives virtuelles pour les cinématiques 1, 2 et 3 décrites dans le tableau (3.2).

Si maintenant, nous calculons la correction radiative virtuelle associée à la diffusion élastique pour les valeurs de Q^2 associées aux trois cinématiques, on obtient :

$$\begin{aligned} Q^2 = 0.3 \text{ GeV}^2 : \delta_V^{\text{él.}} &= -16.3 \% \\ Q^2 = 1. \text{ GeV}^2 : \delta_V^{\text{él.}} &= -18.6 \% \\ Q^2 = 2. \text{ GeV}^2 : \delta_V^{\text{él.}} &= -21.6 \% \end{aligned}$$

On constate alors qu'il existe bien une proximité entre la valeur de la correction radiative virtuelle calculée pour le processus "Bethe-Heitler + Born" et celle de la correction radiative virtuelle à la diffusion élastique. Ceci est un test significatif supplémentaire du calcul que nous avons effectué.

3.6.2 Erreurs systématiques liées au calcul des corrections radiatives virtuelles

Les erreurs systématiques liées au calcul des corrections radiatives virtuelles au processus "Bethe-Heitler + Born" figurent dans le tableau (3.3).

	Erreur systématique $\Delta\delta_V$
Calcul numérique	négligeable
Ordre supérieur ($\frac{\delta_V^2}{4}$)	$< 1.0\%$
Graphes négligés	$< 0.7\%$
Total (\sum linéaire)	$< 1.7\%$
Total (\sum quadratique)	$< 1.2\%$

Tableau 3.3 - *Erreurs systématiques liées au calcul des corrections radiatives virtuelles. $(\delta_V/2)$ correspond au terme immédiatement supérieur dans le développement limité de $\exp(\delta)$ divisé par 2 car l'exponentiation tient compte de l'émission-absorption de photons à tous ordres. Les graphes négligés sont les graphes d'échange de deux photons virtuels entre les vertex leptonique et hadronique (cf. 54) et le rayonnement du proton.*

3.6.3 Correction des données expérimentales

Ce paragraphe décrit la méthode qui est utilisée pour corriger des effets radiatifs la section efficace expérimentale se rapportant à l'expérience de Mayence qui est en cours d'analyse. Ceci nous amène à considérer l'évaluation des corrections radiatives internes réelles dépendantes de la coupure expérimentale.

On applique la relation :

$$\sigma_{exp}^{corr} = e^{-(\delta_V + \delta_R + \delta')} \sigma_{exp} \quad (3.54)$$

avec :

- δ_V : correction radiative virtuelle totale définie par l'équation 3.52 et calculée dans ce chapitre,

- δ_R : correction radiative interne réelle dont la détermination sera discutée ci-après,
- δ' : correction radiative externe, cf. page 42,
- σ_{exp} : section efficace expérimentale d'électroproduction de photons sur le proton proportionnelle à $|T_{BH} + T_{Born}^{FVCS} + T_{Non-Born}^{FVCS}|^2$.

On note que δ_V et δ_R sont ici des quantités finies car les termes divergents infrarouges disparaissent lors de la compensation, cf. paragraphe 3.4 page 98. Par ailleurs, on rappelle que δ_V et δ_R sont calculées pour le processus “Bethe-Heitler + Born” dont la section efficace est proportionnelle à $|T_{BH} + T_{Born}^{FVCS}|^2$. Le fait d'appliquer ces corrections radiatives aux données expérimentales suppose que la section efficace “Bethe-Heitler + Born” se factorise dans la section efficace d'électroproduction de photons sur le proton. On souligne que ceci constitue notre principale approximation. L'estimation de l'erreur commise est délicate car elle fait intervenir les états excités du proton et par suite nécessite d'effectuer un calcul dans le cadre d'un modèle théorique décrivant le proton. Nous considérons cette erreur comme négligeable car les effets radiatifs dominants, ceux produits par l'électron, sont pris en compte dans notre calcul. En outre, on signale que la méthode actuelle utilisée pour déterminer δ_R , décrite ci-après, conduit elle-aussi à une erreur que l'on estime à 1%. Finalement, l'erreur systématique totale sur la section efficace expérimentale absolue et corrigée, liée aux corrections radiatives, est actuellement inférieure à 1.6% (somme quadratique des erreurs), 2.7% ((somme linéaire des erreurs)).

Corrections radiatives internes réelles :

A partir de la formule (2.96) du chapitre 2, δ_R s'écrit sous la forme :

$$\delta_R = T_{anal} + f(\Delta E_{cut}) \quad (3.55)$$

T_{anal} est un terme analytique fonction uniquement de la cinématique et $f(\Delta E_{cut})$ est dépendant de la coupure expérimentale ΔE_{cut} .

Deux difficultés se présentent lorsqu'on désire utiliser la formule (3.55) pour corriger les données du VCS :

- Lors des expériences de diffusion Compton virtuelle, on détecte en coïncidence l'électron et le proton diffusés dans deux spectromètres. Ceci nous permet de reconstruire précisément le spectre en masse manquante carrée. Les événements VCS sont signés par une masse manquante nulle. Par conséquent, nous n'avons accès qu'à des spectres en masse manquante et il n'existe plus de relation univoque entre ΔM_{cut} (coupure en masse manquante) et ΔE_{cut} . La méthode expérimentale décrite pour la diffusion élastique dans le chapitre 2 page 81 n'est plus applicable directement.
- La formule (3.55) suppose que le photon réel supplémentaire rayonné ait une énergie très inférieure aux autres énergies mises en jeu dans la réaction. Dans le cas de la diffusion élastique ceci était justifié mais ici l'énergie du photon réel supplémentaire rayonné doit être comparé à l'énergie du photon réel “VCS” émis. A Mayence, par exemple, certaines cinématiques conduisent à un photon “VCS” de 33MeV. Dans ce cas, l'énergie du photon réel supplémentaire rayonné peut atteindre 8MeV, cf. thèse

de D. Lhuillier, et par conséquent, l'approximation des photons “mous” évoquée dans le chapitre 2 est plus discutable.

Concernant le premier point, actuellement, dans le but de corriger les données acquises à Mayence, on utilise toujours les formules (3.55) et (3.54) avec $f(\Delta E_{cut})$ et δ' prises en compte par L. Vanhoorebeke [51] dans une simulation Monte-Carlo de l'expérience.

A l'avenir, la résolution du deuxième point nous permettra de revenir à une méthode équivalente à celle décrite pour la diffusion élastique car on aura alors accès à une formule pour δ_R dépendante de ΔM_{cut} . En effet, pour la diffusion Compton virtuelle, il faut redériver la formule (2.15) du chapitre 2 :

$$\left(\frac{d\sigma^{BH+Born}}{d\Omega_{e'}} \right)_{Bi} = \left(\frac{d\sigma^{BH+Born}}{d\Omega_{e'}} \right) \int_0^{\bar{l} < \Delta E_{cut}} \mathcal{A} d^3 \bar{l} \quad (3.56)$$

en découpant artificiellement l'intervalle $[0, \Delta E_{cut}]$ en deux intervalles :

→ $[0, \Delta E_{mou}]$ avec ΔE_{mou} arbitraire mais choisie très inférieure aux autres énergies mises en jeu.

→ $[\Delta E_{mou}, \Delta E_{cut}]$.

Dans ces conditions, la section efficace de Bremsstrahlung interne deviendra :

$$\left(\frac{d\sigma^{BH+Born}}{d\Omega_{e'}} \right)_{Bi} = \left(\frac{d\sigma^{BH+Born}}{d\Omega_{e'}} \right) \left[\int_0^{\bar{l} < \Delta E_{mou}} \mathcal{A} d^3 \bar{l} + \int_{\Delta E_{mou}}^{\Delta E_{cut}} \mathcal{A} d^3 \bar{l} \right] \quad (3.57)$$

$$= \left(\frac{d\sigma^{BH+Born}}{d\Omega_{e'}} \right) \left[T_{anal} + \underbrace{f(\Delta E_{mou}) + g(\Delta E_{mou}, \Delta E_{cut})}_{F(\Delta M_{cut})} \right] \quad (3.58)$$

et on pourra finalement utiliser :

$$\delta_R(\Delta M_{cut}) = T_{anal} + F(\Delta M_{cut}) \quad (3.59)$$

avec ΔM_{cut} la coupure sur masse manquante. δ_R est indépendante de la valeur arbitraire choisie pour ΔE_{mou} .

Pour utiliser (3.59), il reste encore à effectuer numériquement l'intégrale $\int_{\Delta E_{mou}}^{\Delta E_{cut}} \mathcal{A} d^3 \bar{l}$.

Actuellement, on estime que l'on commet une erreur sur δ_R de l'ordre de 1%.

3.6.4 Estimation des corrections radiatives totales

A titre indicatif, on a porté dans le tableau (3.4), l'ordre de grandeur des corrections radiatives qu'il faudra appliquer aux données VCS acquises à Jefferson Lab.. On souligne que la correction associée aux effets radiatifs internes réels dépendante de la coupure expérimentale a été évaluée ici en utilisant la méthode du radiateur équivalent pour la diffusion élastique correspondante [51]. Pour le calcul des corrections radiatives externes, la coupure est fixée à 15MeV.

	Virtuelles	Réelles			Externes	Totales	
Cin.	δ_V (%)	T_{anal} (%)	$f(\Delta E_{cut})$ (%)	δ_R (%)	δ' (%)	δ (%)	$\exp(-\delta)$
1	- 15.6	+ 22.0	\approx (- 17.3)	\approx (+ 4.7)	\approx (- 7.23)	\approx (- 18.1)	\approx 1.20
2	- 18.3	+ 25.6	\approx (- 23.2)	\approx (+ 2.4)	\approx (- 11.84)	\approx (- 27.7)	\approx 1.31
3	- 20.3	+ 28.1	\approx (- 26.3)	\approx (+ 1.8)	\approx (- 11.81)	\approx (- 30.3)	\approx 1.36

Tableau 3.4 - *Estimation des corrections radiatives totales pour les cinématiques décrites dans le tableau (3.2). On rappelle $\sigma_{exp}^{corr} = \exp(-\delta)\sigma_{exp}$.*

3.7 Conclusion

L’originalité du calcul des corrections radiatives virtuelles au processus “Bethe-Heitler + Born” repose sur la méthode astucieuse d’addition-soustraction mise au point par M. Vanderhaeghen. La précision des résultats obtenus est due à l’étude méticuleuse des fonctions à intégrer. Le fait que la première intégration est effectuée pour une large part analytiquement joue un rôle crucial du point de vue de la précision. Toutes les formules que nous avons développées pour pouvoir intégrer analytiquement les fonctions, régulières et singulières, des paramètres de Feynman font l’objet du rapport [84]. Pour la partie numérique du calcul, le découpage de l’intervalle en plusieurs tranches choisies judicieusement contribue également à une précision maximale. La crédibilité en nos résultats est renforcée par les deux programmes indépendants développés pour ce calcul et les nombreux tests que l’on a effectués. En particulier on citera le respect de l’invariance de jauge et la continuité avec les résultats de la diffusion élastique.

Ce calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle sous le seuil de production du pion a été motivé par les expériences réalisées à des Q^2 compris entre 0.33GeV^2 et $2.\text{GeV}^2$ à Mayence et à Jefferson Lab.. Ce calcul est vital à l’exploitation de ces expériences, c’est-à-dire pour l’extraction des Polarizabilités Généralisées.

Deuxième partie

Mesure absolue de l'énergie du
faisceau d'électrons pour le hall A de
Jefferson Lab. par une méthode
magnétique : projet ARC

Chapitre 1

Cadre du projet ARC

Depuis le début des années 60, l'outil privilégié pour explorer la matière nucléaire est la diffusion de leptons qui s'assimile à un microscope dont la résolution spatiale est d'autant meilleure que l'énergie du faisceau de leptons est grande. Les leptons sont ponctuels et leur interaction avec les constituants du noyau est parfaitement connue. Les faisceaux les plus largement utilisés sont les faisceaux d'électrons car ils sont plus facilement mis en oeuvre que les faisceaux de muons. Les techniques permettant d'accélérer des électrons ont très vite évolué et ont permis de délivrer des faisceaux de très haute énergie dès les années 70. Dès lors, la communauté des physiciens, passionnée par l'exploration de la matière nucléaire, s'est divisée en fonction de l'énergie des faisceaux mise en jeu. A partir des années 70-80, on distingue les physiciens nucléaires, étudiant la structure des noyaux à basse énergie ($E_e < 500 \text{ MeV}$), des physiciens des particules utilisant des faisceaux très énergétiques ($E_e > 20 \text{ GeV}$) afin de mettre en évidence le comportement des quarks et des gluons évoluant librement à l'intérieur des nucléons. Entre ces deux domaines se situe la région de transition où les quarks passent de l'état confiné à l'état "libre". La partie de physique nucléaire évoluant vers ce domaine d'énergies intermédiaires est qualifiée de physique hadronique. Comprendre la structure des hadrons et la dynamique du confinement des quarks à l'intérieur des nucléons est la motivation première du nouveau laboratoire américain Jefferson Lab qui a vu le jour au milieu des années 80.

Afin d'explorer cette région de transition, ce laboratoire, situé au coeur de la Virginie, abrite un accélérateur linéaire, CEBAF¹, délivrant un faisceau continu d'électrons dont l'énergie est comprise entre 500 MeV et 6 GeV. Ce faisceau d'électrons de haute intensité est destiné au trois halls expérimentaux où sera explorée la matière nucléaire à l'aide d'équipements de détection *ad hoc* que nous décrirons brièvement. Une fois familiarisé avec ce laboratoire, nous nous focaliserons plus particulièrement sur les expériences planifiées dans le hall A nécessitant une précision de 10^{-4} sur la connaissance de l'énergie absolue du faisceau incident d'électrons. Nous montrerons en particulier que cette précision de 10^{-4} sur l'énergie du faisceau incident est indispensable pour extraire la fonction de structure longitudinale des noyaux légers à 5% près par séparation transverse longitudinale. Par ailleurs, nous verrons qu'une connaissance précise de l'énergie des électrons incidents est un atout pour la calibration des spectromètres HRS du hall A. On comprend donc pourquoi une telle précision sur l'énergie absolue du faisceau est justifiée mais l'obtenir représente un véritable défi dans le cas d'un faisceau délivré par un accélérateur linéaire.

1. CEBAF : Continuous Electron Beam Accelerator Facility.

Parmi les nombreuses méthodes proposées et discutées pour atteindre la précision requise, les méthodes “ARC” et “e-p” ont été retenues par la collaboration du hall A de Jefferson Lab. Du fait de leur indépendance, ces deux méthodes pourront se recouper mutuellement. La méthode baptisée “e-p” s’appuie sur la diffusion élastique $p(e,e'p)$ et consiste à mesurer très précisément les angles des électrons et protons sortants. Nous présenterons les grandes lignes du principe de la méthode “e-p”, novatrice en matière de mesure d’énergie d’un faisceau. Nous décrirons ensuite une méthode basée sur la précession du spin d’électrons polarisés. Cette troisième méthode est aujourd’hui envisagée pour contrôler ponctuellement les mesures d’énergie obtenues par les méthodes “e-p” et “ARC”. La dernière partie de ce chapitre sera naturellement consacrée à l’introduction de la méthode “ARC” faisant l’objet de ma thèse. Cette méthode “ARC” est dite magnétique car elle utilise la déviation magnétique, transportant le faisceau de l’accélérateur au hall A. Cette méthode nécessite un réglage optique de la déviation magnétique dispersif². Ainsi, en utilisant ce mode de fonctionnement, nous montrerons que la mesure de l’intégrale de champ magnétique le long de la déviation d’une part et la mesure de l’angle total de déviation du faisceau d’autre part permettront de déterminer l’énergie des électrons avec la précision exigée. Nous évaluerons les pertes d’énergie du faisceau par rayonnement synchrotron dans la déviation magnétique afin de nous assurer qu’elles ne représenteront pas une source d’erreur supplémentaire sur la connaissance de l’énergie du faisceau. Les principes de la mesure d’angle et de la mesure de l’intégrale de champ magnétique, nécessaires à la détermination de l’énergie par la méthode ARC, seront développés dans les deux prochains chapitres. Par ailleurs, nous discuterons d’une seconde méthode magnétique, développée au SLAC il y a quelques années, dans le but de la comparer à la méthode ARC.

1.1 Jefferson Lab

Le laboratoire Jefferson Lab, officiellement TJNAF³, est situé à 250km au sud-est de Washington, à Newport News dans l’état de Virginie. La figure (1.2) permet de localiser Jefferson Lab en Virginie et présente un plan du site.

La direction de ce laboratoire revient à l’association des universités du sud-est, le SURA⁴, mandatée par le département américain à l’énergie, le DOE⁵. Outre les laboratoires et universités américains, de nombreux laboratoires de part le monde ont contribué à la construction d’équipements expérimentaux en vue de participer au programme expérimental. Depuis 1987, 80 expériences ont été acceptées regroupant 116 laboratoires de 23 pays diffé-



Figure 1.1 - *L’accélérateur CEBAF de Jefferson Lab vu d’avion*

2. mode dispersif : seuls les dipôles sont alimentés.

3. TJNAF : Thomas Jefferson National Accelerator Facility.

4. SURA : Southeastern Universities Research Association.

5. DOE : Department Of Energy.

rents. La réalisation de ces premières expériences représente 3 ans de temps de faisceau dans chacun des trois halls expérimentaux (A, B et C).

La France, représentée par les laboratoires du CEA/DAPNIA et du CNRS/IN2P3, est largement impliquée dans le programme de physique de Jefferson Lab. De ce fait, ces deux laboratoires sont investis dans de nombreux projets techniques. On citera, entre autres, les mesures d'énergie de haute précision et le polarimètre Compton dans le hall A ainsi que la cible cryogénique du Hall B.

1.1.1 Caractéristiques de l'accélérateur CEBAF à Jefferson Lab

Cet accélérateur linéaire d'électrons à recirculations, conçu en 1986, a bénéficié de l'état de l'art de l'époque en matière de cavités supraconductrices. Les deux parties linéaires accélératrices appelées "LINAC⁶", cf. figure (1.3), sont constituées de cavités supraconductrices en Niobium pur fonctionnant à la fréquence de 1497MHz. A chaque passage dans un "LINAC", les paquets d'électrons sont accélérés de 400MeV. Les deux "LINAC" sont reliés par des arcs de recirculation représentés sur la figure (1.3). A chaque tour, c'est à dire après un passage dans chacun des "LINAC", les électrons acquièrent 800MeV, soit 4GeV en 5 tours. Les électrons sont injectés dans le premier "LINAC" à 45MeV. Deux sources d'électrons sont disponibles : une de type thermo-ionique pour des faisceaux non polarisés et une à photocathode GaAs pour des faisceaux polarisés. Cette dernière source devrait permettre d'obtenir un faisceau de 100 μ A polarisé à 50%.

CEBAF délivre un faisceau dont l'énergie est comprise entre 500MeV et 4GeV. Une particularité de cet accélérateur réside dans le fait qu'il possède, en sortie du deuxième "LINAC", des séparateurs radio-fréquence permettant d'envoyer un faisceau simultanément dans trois halls expérimentaux.

Dans le tableau (G.1) sont reportées les principales caractéristiques du faisceau délivré à Jefferson Lab.

Energie minimum nominale	445MeV
Energie maximum nominale	4045MeV
Intensité maximum	200 μ A
Emittance	2. 10 ⁻⁹ m.rad

Tableau 1.1 - *Principales caractéristiques du faisceau délivré à Jefferson Lab.*

En 1997, des tests ont montré que les cavités supraconductrices des LINACS présentait des caractéristiques bien meilleures que les spécifications initiales. En effet, le gradient de champ accélérateur des cavités est de 9.1MV/m au lieu des 5MV/m spécifiés et le facteur de qualité des cavités, Q_0 , est de 8. 10⁹ au lieu de 2.4 10⁹. Pratiquement, à chaque passage dans un LINAC, les électrons peuvent être accélérés jusqu'à 500MeV. Fin 97, il sera possible d'obtenir, dans les halls expérimentaux, des faisceaux d'énergie jusqu'à 5GeV, voire 6GeV, sans modifications majeures. L'accélérateur de Jefferson Lab a également le potentiel d'augmenter l'énergie du faisceau jusqu'à 8-10GeV. Toute montée

6. LINAC : LINear ACcelerator.

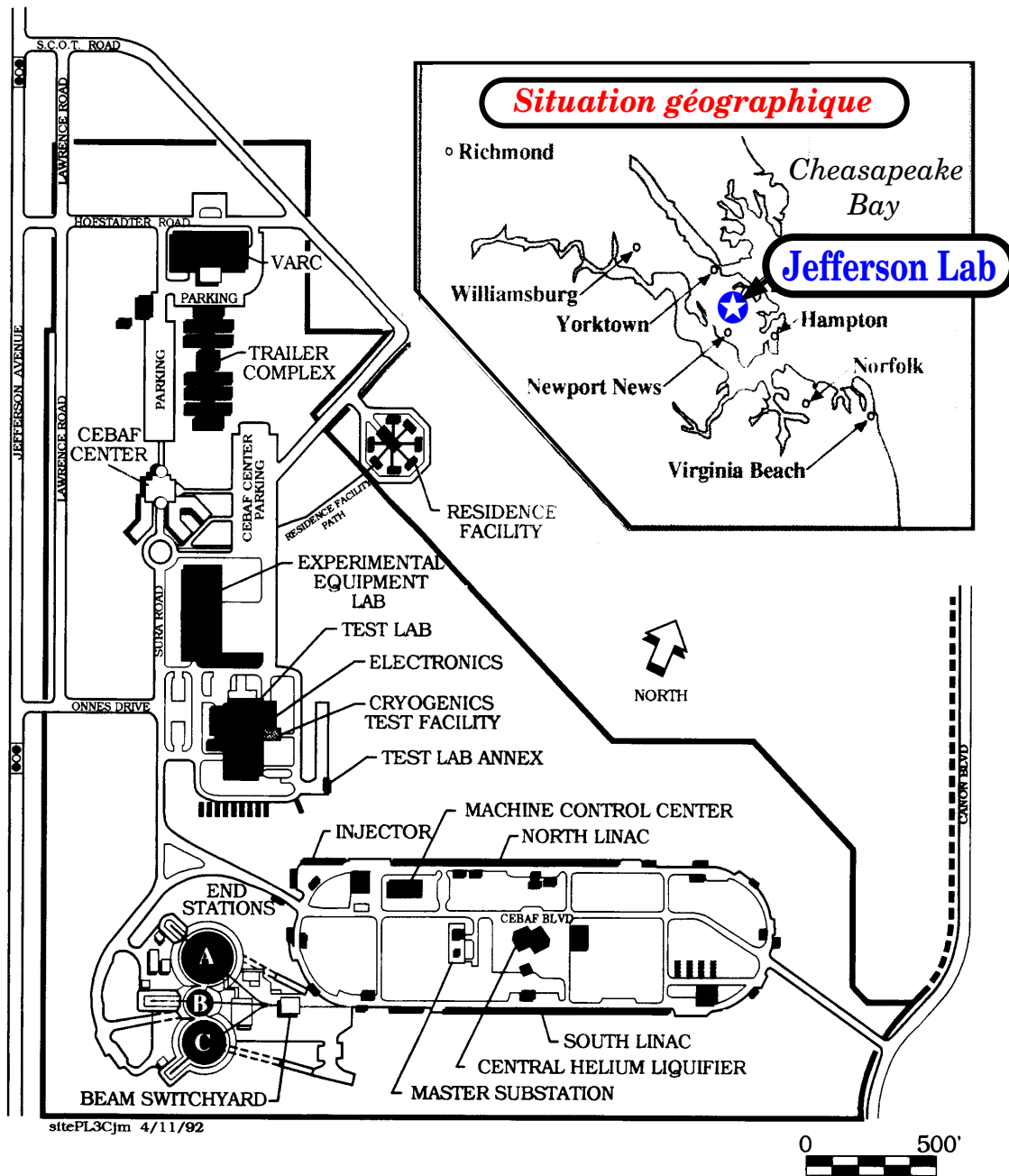


Figure 1.2 - Situation géographique de Jefferson Lab et plan des installations

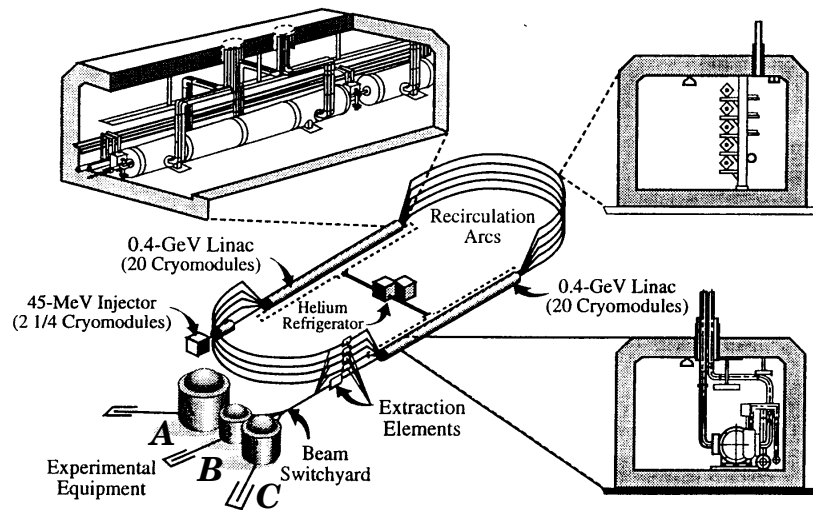


Figure 1.3 - Schéma de l'accélérateur de Jefferson Lab

en énergie au-delà de 6GeV représentera cependant un coût important puisqu'il faudra rajouter des cavités et remplacer tous les aimants de l'accélérateur.

1.1.2 Les halls expérimentaux

Chacun des trois halls expérimentaux, appelés A, B et C, a été conçu pour des types d'expériences bien spécifiques nécessitant un équipement expérimental adapté. Le premier des halls à avoir exploité un faisceau de 4GeV fut le hall C en mai 1995. La mise en service du hall A date de mai 1996 tandis que celle du hall B remonte à Novembre 1996. A l'heure actuelle, l'accélérateur est capable de délivrer du faisceau dans les trois halls simultanément. Dans les trois parties qui suivent, nous présenterons succinctement les équipements de chacun des halls et citerons les principales expériences qui s'y dérouleront ou s'y sont déroulées. Pour plus d'informations sur les halls et les programmes de recherche associés, on se reportera aux références [1], [2] et [3]. Par ailleurs, nous reviendrons plus en détail sur les expériences du hall A qui ont motivé une mesure absolue d'énergie avec une précision de 10^{-4} .

1.1.2.1 Le hall A

Ce hall est équipé de deux spectromètres identiques de très haute résolution appelés HRS⁷. Ces spectromètres sont constitués d'un dipôle et de trois quadripôles à bobines supraconductrices (Q1.Q2.D.Q3). La figure (1.4) représente un des spectromètre HRS du hall A. Les principales caractéristiques d'un spectromètre HRS sont répertoriées dans le tableau (1.2).

Les deux spectromètres sont identiques mais l'ensemble détecteur diffère légèrement selon qu'il s'agit du spectromètre dédié aux électrons ou de celui dédié aux hadrons. En particulier, seul le bras hadron est équipé d'un polarimètre de plan focal (FPP⁸) alors

7. HRS : High Resolution Spectrometer.

8. FPP : Focal Plan Polarimeter

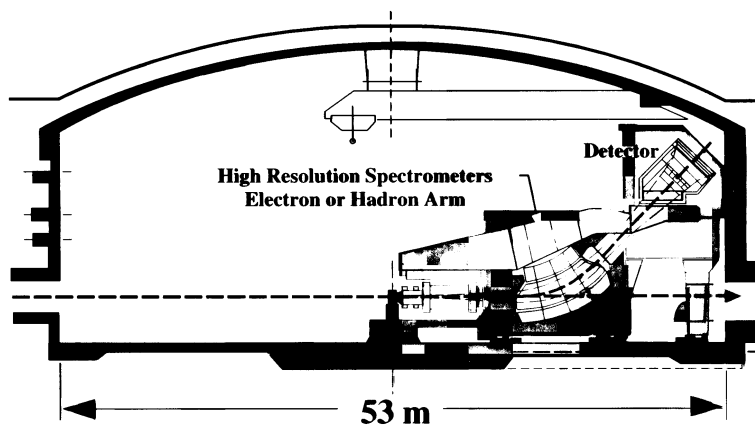


Figure 1.4 - Représentation d'un spectromètre HRS du hall A.

Longueur optique	23.4m
Impulsion minimum	0.3GeV/c
Impulsion maximum	4GeV/c
Résolution en impulsion (FWHM)	10^{-4}
Résolution angulaire horiz. (FWHM)	0.5mrad
Résolution angulaire vert. (FWHM)	1mrad
Acceptance totale en impulsion ($\Delta p/p$)	10%
Angle solide	7.8msr
θ_{min}	12.5°
θ_{max} bras électron	165°
θ_{max} bras hadron	130°
Luminosité maximum	$10^{38} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$

Tableau 1.2 - Caractéristiques d'un spectromètre HRS.

que le bras électron est équipé d'un calorimètre électromagnétique. Néanmoins, on retrouve dans les deux cas l'équipement de détection standard constitué d'un ensemble de chambres à fils, de scintillateurs plastiques et d'un compteur Čerenkov à gaz.

Le programme de recherche du hall A est principalement axé sur l'étude très précise des réactions $(e, e'p)$ et $(\bar{e}, e'\bar{p})$ où deux particules sont détectées en coïncidence, une dans chacun des deux spectromètres. De mai 1996 au printemps 97, le faisceau délivré au hall A était réservé à la mise en service successive des deux bras de spectromètres et à la mise au point des logiciels d'acquisition et d'analyse. Le programme expérimental du hall A a débuté en avril 97 par l'étude de la réaction quasiélastique sur l' ^{16}O (PR-89-003) utilisant la cible d'eau ou "waterfall target". La cible cryogénique du hall A, réplique de celle du hall C, est disponible depuis octobre 1997 et ouvre ainsi la voie aux expériences telles que la mesure des fonctions de structure du deuton à haut transfert (PR-91-026) ou la mesure des polarisabilités généralisées par diffusion Compton virtuelle (PR-93-050), discutée dans la première partie de ce document. Pour le VCS, la prise de données permettant d'obtenir l'ensemble de la statistique prévue dans la proposition d'expérience aura lieu au printemps 98. Il est entendu que l'ensemble de ces premières expériences contribuent à la calibration des deux spectromètres HRS. On soulignera que toutes les expériences qui se dérouleront dans le hall A, à partir de mi-98, bénéficieront des deux méthodes de mesure d'énergie du faisceau incident à 10^{-4} près. On attend les premiers résultats significatifs des expériences réalisées dans le hall A pour courant 1998.

1.1.2.2 Le hall B

Le détecteur à grand angle solide du hall B, appelé CLAS⁹, décrit sur la figure (1.5) constitue un véritable défi technique. Du fait de son grand angle solide, il est particulièrement adapté pour la détection de plusieurs particules émises dans l'état final et faiblement corrélées. La luminosité est quant à elle limitée à $10^{34}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

L'aimant de CLAS est constitué de six bobines supraconductrices générant un champ magnétique toroïdal d'amplitude maximum 2.5T. Entre chaque paire de bobines est intercalée une série de détecteurs formant un "quartier d'orange" : première chambre à fils, seconde chambre à fils, scintillateurs, compteur Čerenkov et un calorimètre aux angles avant. La figure (1.5) donne une idée de cet impressionnant détecteur aux 46000 fils de détection...

Outre les faisceaux d'électrons, cette salle expérimentale est la seule à disposer d'un faisceau de photons réels étiquetés, obtenus par Bremsstrahlung sur une cible primaire placée à l'entrée du hall. Le flux de photons prévu est de $10^8/\text{s}$ et la précision escomptée sur l'énergie des photons étiquetés est de 10^{-3} .

Parmi les nombreuses expériences déjà acceptées dans le hall B, on citera les expériences de photo- et électro-production de mésons vecteurs dans lesquelles est impliqué un groupe du CEA/DAPNIA. La contribution de ce groupe à l'équipement expérimental du hall est la réalisation de la cible cryogénique.

9. CLAS : CEBAF Large Acceptance Spectrometer.

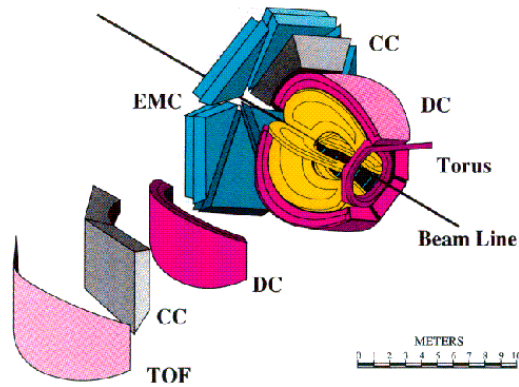


Figure 1.5 - *CLAS*: le détecteur à large angle solide du hall B.

1.1.2.3 Le hall C

Premier hall de Jefferson Lab à avoir été mis en service, le hall C a commencé son programme expérimental à l'automne 96. La particularité de ce hall est de pouvoir s'adapter à un large éventail d'expériences.

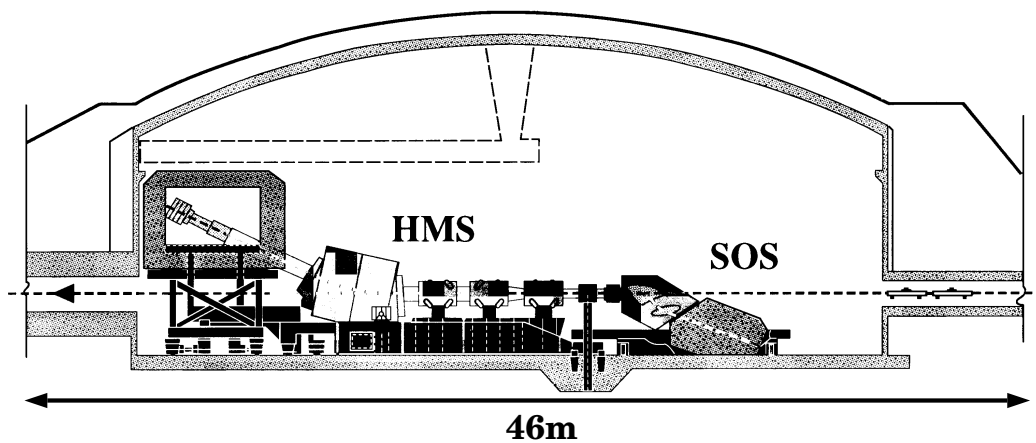


Figure 1.6 - *Vue du hall C.*

L'équipement initial de cette aire expérimentale est constitué de deux spectromètres appelés HMS¹⁰ et SOS¹¹. Comme son nom l'indique, le spectromètre HMS est particu-

10. HMS : High Momentum Spectrometer.

11. SOS : Short Orbit Spectrometer.

lièrement adapté à la détection de particules de grande impulsion. Il possède en outre un grand angle solide et sa résolution en impulsion est de 10^{-3} . De part sa courte longueur optique (7.4m), le spectromètre SOS sera, lui, principalement dédié à la détection de particules de courte durée de vie telles que les pions et les kaons de faible impulsion.

Le hall C est conçu de telle sorte qu'on puisse lui adjoindre d'autres types de spectromètres ou des équipements de détection additionnels. L'expérience T₂₀ (E94-018), à laquelle participait une forte collaboration française, a par exemple nécessité l'ajout d'un spectromètre à deutons équipé d'un polarimètre de plan focal, POLDER.

1.2 Nécessité d'une mesure absolue de l'énergie avec une précision de 10^{-4} dans le hall A

Initialement, la connaissance de l'énergie absolue du faisceau avec une précision de 10^{-4} était principalement requise pour les expériences de séparation transverse longitudinale planifiées dans le hall A. Aujourd'hui, alors que l'on procède à la calibration des deux spectromètres du hall A, une mesure précise de l'énergie aidera à fixer l'ensemble des paramètres cinématiques relatifs aux événements mesurés.

1.2.1 Les expériences de séparation transverse longitudinale

La motivation pour une mesure absolue de l'énergie avec une telle précision dans le hall A est argumentée en détail dans la référence [5], nous en reprendrons ici quelques points. Ce document s'appuie sur les expériences de séparation transverse longitudinale sur les noyaux de deutérium¹² et d'hélium¹³ proposées dans le hall A. A partir du principe de telles expériences, montrons pourquoi il est nécessaire de connaître avec précision l'énergie absolue du faisceau incident d'électrons. Dans ce but, je me suis appuyée sur la thèse de J.E. Ducret [6].

Expérimentalement, on réalise ces expériences par réaction exclusive A(e,e'p)A-1. L'électron diffusé par le noyau cible et le proton éjecté sont détectés en coïncidence dans deux spectromètres. On accède alors aux angles et aux impulsions des deux particules diffusées.

Nous nous plaçons dans l'approximation où un seul photon de quadri-moment q est échangé entre la paire (e,e') et le noyau. La figure [1.7] illustre une telle réaction sur un noyau de deutérium.

Par la suite, on utilisera les variables suivantes définies dans le référentiel du laboratoire :

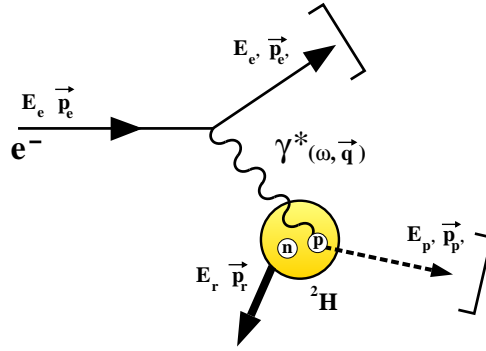
E_e, \vec{p}_e : énergie, impulsion de l'électron incident,

$E_{e'}, \vec{p}_{e'}$: énergie, impulsion de l'électron diffusé,

$E_d, \vec{p}_d(= \vec{0})$: énergie, impulsion du noyau au repos,

12. Expérience 94-004 : $^2\text{H}(e,e'p)n$, porte-parole : P.E. Ulmer.

13. Expérience 89-044 : $^3,^4\text{He}(e,e'p)^2,^3\text{H}$, porte-paroles : M.B. Epstein, A. Saha, R. Lourie, J. Mougey.

Figure 1.7 - Réaction ${}^2\text{H}(e, e'p)n$.

E_r, \vec{p}_r : énergie, impulsion de recul du noyau après interaction,

$E_{p'}, \vec{p}_{p'}$: énergie, impulsion du proton éjecté,

ω, \vec{q} : énergie, impulsion du photon virtuel échangé,

$$\omega = E_e - E_{e'}; Q^2 = -q^2 = 4E_e E_{e'} \sin^2(\theta_{ee'}/2).$$

$\theta_{ee'} = (\widehat{\vec{p}_e, \vec{p}_{e'}})$: angle de diffusion de l'électron.

La mesure de l'électron diffusé combinée à la connaissance de l'énergie incidente du faisceau sur la cible permet de déterminer q , le quadri-moment transféré au noyau de deutérium.

La mesure de l'impulsion du proton éjecté $\vec{p}_{p'}$, nous permet de reconstruire l'impulsion de recul $\vec{p}_r (= \vec{q} - \vec{p}_{p'})$ du noyau résiduel $(A-1, Z-1)^*$, ainsi que son énergie E_r .

On en déduit alors la masse manquante de la réaction $(M_{(A-1)})^* = \sqrt{E_r^2 - \vec{p}_r^2}$ qui est une quantité importante car elle permet d'identifier la réaction et est directement liée à l'énergie de liaison E_m qu'avait le proton dans le noyau avant d'être éjecté :

$$E_m = M_p + (M_{(A-1)})^* - M_A \quad (1.1)$$

Pour simplifier, raisonnons à $M_{(A-1)}^*$ fixée. Par exemple, la section efficace associée à la réaction ${}^2\text{H}(e, e'p)n$ s'exprime dans le référentiel du laboratoire sous la forme [6] :

$$\frac{d^5 \sigma}{dE_{e'} d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} = \Gamma \left(\sigma_T + \varepsilon \sigma_L + \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 1)} \sigma_{TL} \cos \phi + \varepsilon \sigma_{TT} \cos \phi \right) \quad (1.2)$$

avec :

ε : Taux de polarisation linéaire du photon virtuel :

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + 2 \frac{\vec{q}^2}{Q^2} \tan^2(\theta_{ee'}/2)} \quad (1.3)$$

Γ : Flux de photons virtuels :

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{E_{e'}}{E_e} \frac{|\vec{q}|}{Q^2} \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (1.4)$$

ϕ : angle azimutal entre les plans leptonique et hadronique (figure [1.8]).

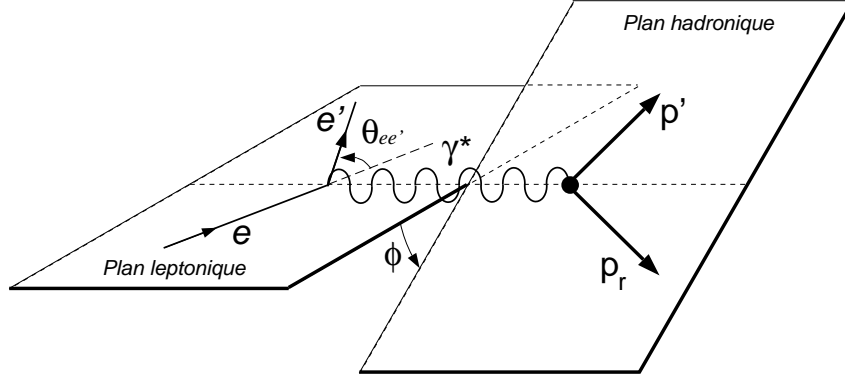


Figure 1.8 - Réaction $^2H(e, e' p) n$: plan leptonique et plan hadronique.

σ_T , σ_L , σ_{TT} et σ_{TL} sont appelées fonctions de structure ou fonctions de réponse du noyau cible, respectivement transverse (T), longitudinale (L), d'interférence transverse-transverse (TT) et transverse-longitudinale (TL). Ces grandeurs caractérisent la réponse du noyau à une excitation électromagnétique et ne sont fonction que de q^2 et ω . La fonction de structure longitudinale σ_L est proportionnelle à la densité de charge et nous renseigne donc sur la structure coulombienne du courant électromagnétique nucléaire. La fonction de structure transverse σ_T nous donne quant à elle accès à la structure magnétique de ce courant.

Dans le cas particulier où \vec{q} et $\vec{p}_{p'}$ sont parallèles, l'angle ϕ devient indéterminé. Dans cette configuration cinématique, la symétrie du courant hadronique autour de l'axe défini par \vec{q} implique que σ_{TT} et σ_{TL} sont nulles et que par conséquent la section efficace s'écrit :

$$\frac{d^5 \sigma}{dE_{e'} d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} = \Gamma (\sigma_T + \varepsilon \sigma_L) \quad (1.5)$$

avec $\sigma_T = \sigma_T(q^2, \omega)$ et $\sigma_L = \sigma_L(q^2, \omega)$.

On sépare ces deux fonctions de structure, transverse et longitudinale, par la méthode de Rosenbluth : on mesure la section efficace de la réaction $A(e, e' p) A-1$ dans plusieurs cinématiques où l'on maintient constantes les variables définissant le vertex hadronique (q^2 et ω). Pour ce faire, on modifie les variables du vertex leptonique (E_e , $E_{e'}$, $\theta_{ee'}$), ce qui induit une variation de ε à q^2 et ω fixés.

Les cinématiques où $(\widehat{\vec{p}_{p'}}, \vec{q}) = 0$ sont dites *parallèles* tandis que celles où $(\widehat{\vec{p}_{p'}}, \vec{q}) = \pi$ sont dites *anti-parallèles*. La séparation de σ_T et σ_L s'effectue par le jeu de deux mesures

de section efficace (le proton détecté restant dans les deux cas aligné ou “anti-aligné” avec le vecteur impulsion du photon virtuel) :

- une mesure à angle avant : $\varepsilon \simeq 1$,
- une mesure à angle arrière : $\varepsilon \simeq 0$.

à $|\vec{q}|$, ω constants.

La figure [1.9] représente de manière schématique les variations en angle et en impulsion de l’électron selon qu’on se place à grand ou à petit angle tout en conservant $|\vec{q}|$, ω .

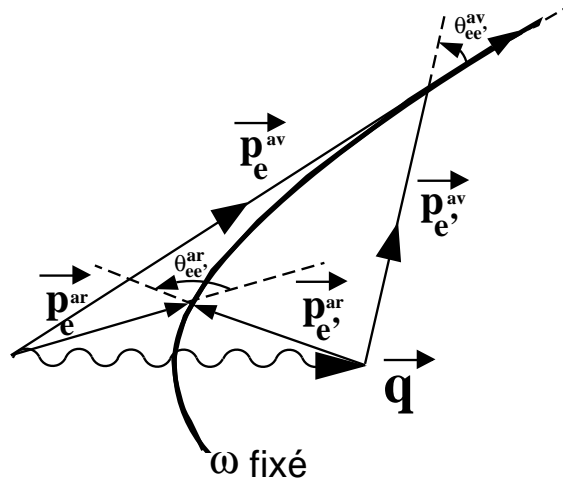


Figure 1.9 - Deux cinématiques extrêmes du point de vue du vertex leptonique pour une séparation T/L à $|\vec{q}|$ et ω fixés. L’hyperbole est le lieu géométrique des points du plan qui conserve $|\vec{p}_e| - |\vec{p}_{e'}| = \omega$ (électrons ultra-relativistes). A chaque hyperbole correspond une valeur de ω . Par construction, $|\vec{q}|$ et donc q^2 sont conservés. Pour une mesure à angle avant $\theta_{ee'}^{av}$, $\varepsilon \simeq 1$ et E_e , $E_{e'}$ sont grands. Pour une mesure à angle arrière $\theta_{ee'}^{ar}$, $\varepsilon \simeq 0$ et E_e , $E_{e'}$ sont petits.

Dans ce type d’expérience, si l’on ne connaît pas précisément l’énergie incidente du faisceau :

- l’égalité de ω et $|\vec{q}|$ entre les deux cinématiques de la séparation n’est pas respectée,
- une erreur sera commise sur la valeur de $|\vec{p}_r|$ à priori différente d’une cinématique à l’autre ($|\vec{p}_r| = |\vec{p}_e - \vec{p}_{e'} - \vec{p}_{p'}|$).

Pour déterminer σ_T et σ_L , on trace la droite de Rosenbluth (figure [1.10]) à partir de l’équation (1.5).

Sur la figure [1.10], on remarque que plus le bras de levier $\Delta\varepsilon$ est faible et plus la méthode de séparation de Rosenbluth conduit à une amplification des erreurs systématiques expérimentales. En général, on souligne que la valeur de $\Delta\varepsilon$ est faible en raison des

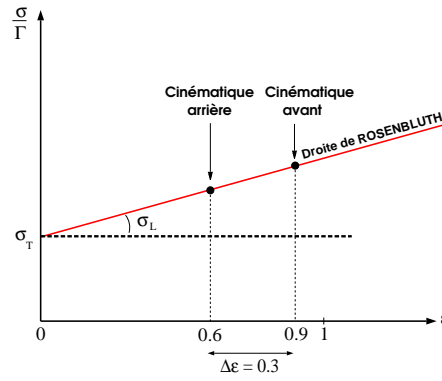


Figure 1.10 - *Droite de Rosenbluth.*

limitations techniques de l'appareillage, typiquement $\Delta\epsilon \simeq 0.3$.

En outre, dans le cas des noyaux légers, toute erreur sur $|\vec{p}_r| = f(E_e)$ induit une erreur importante sur la section efficace car la fonction spectrale associée au proton dans le noyau varie violemment en fonction de l'impulsion de recul $|\vec{p}_r|$. Dans l'approximation PWIA¹⁴, on peut exprimer la section efficace comme le produit de la section efficace électron-proton hors couche de masse et de la fonction spectrale $S(p, E)$:

$$\sigma = \sigma_{e-p} S(p, E) \quad (1.6)$$

La fonction spectrale s'interprète comme l'amplitude de probabilité de trouver dans le noyau cible un proton d'impulsion p et d'énergie E , elle caractérise la distribution en impulsion du proton dans le noyau considéré ($|\vec{p}| = |\vec{p}_r|$). Comme représenté sur la figure [1.11], la fonction $S(p, E)$ présente une décroissance très rapide en fonction de $|\vec{p}_r|$, et ce d'autant plus rapidement que le noyau est léger. A titre de comparaison, la figure [1.11] représente l'allure des fonctions spectrales du proton pour un noyau léger (^2H) et pour un noyau lourd (^{82}Pb) en fonction de $|\vec{p}_r|$. Notons, qu'en dehors du proton, l'essentiel du programme expérimental de Jefferson Lab. porte sur les noyaux légers.

Si on considère que l'incertitude sur les angles des spectromètres est identique pour les angles avant et arrière, l'incertitude sur la section efficace expérimentale [4] est directement proportionnelle à l'incertitude sur l'énergie des électrons incidents :

$$\frac{\partial\sigma}{\sigma} = \frac{\partial E_e}{E_e} \cot \frac{\theta_{e'e'}}{2} \quad (1.7)$$

Pour $\partial E_e/E_e$ fixée, l'incertitude sur la section efficace décroît avec l'angle de diffusion de l'électron. On a vu (figure [1.9]), que les énergies mises en jeu pour les mesures à angle

14. PWIA (Plane Wave Impulse Approximation) :

- la première approximation de Born est valable,
- le photon virtuel est absorbé par un seul nucléon,
- le nucléon est éjecté sans réinteragir avec le noyau résiduel dans l'état final,
- le nucléon détecté est celui qui a interagi avec le photon virtuel.

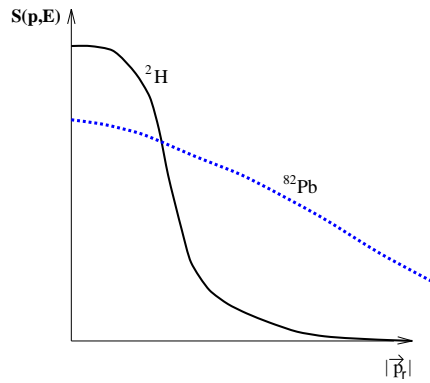


Figure 1.11 - *Fonction spectrale du proton dans un noyau de deutérium et dans un noyau de plomb en fonction de $|\vec{p}_r|$.*

arrière était plus faibles. Par conséquent, la spécification sur la connaissance de l'énergie des électrons incidents est, pour les énergies faibles, inférieure à ce qu'elle est pour les hautes énergies.

A titre d'exemple, cf. référence [5], pour une cinématique parallèle à $|\vec{q}| = 1\text{GeV}/c$, les sections efficaces doivent être connues à 1% près ($\Delta E_e/E_e = 10^{-4}$) pour prétendre déterminer σ_L à 5% près. La figure [1.12] présente pour différentes valeurs de $|\vec{q}|$ et $\theta_{ee'}$, l'erreur relative sur la connaissance de l'énergie incidente qui conduit à une erreur de 1% sur la section efficace $^2\text{H}(e,e'p)n$.

Du fait principalement de l'amplification des erreurs dans la méthode de séparation, les expériences de séparation T/L sont les plus contraignantes du point de vue de la connaissance absolue de l'énergie incidente du faisceau d'électrons. En référence au PAC4¹⁵(1989) de Jefferson Lab., nous nous fixons comme objectif de mesurer l'énergie absolue du faisceau avec une précision relative de 10^{-4} afin de contribuer à des résultats significatifs dans ce genre d'expérience. On note cependant [5] que, pour les mesures à plus basse énergie, $E_e \simeq 500\text{MeV}$ (mesures à angle arrière de la séparation T/L), la précision peut être relâchée quelque peu.

Mesurer l'énergie absolue avec une précision relative de 10^{-4} représente donc un point de passage obligé pour accéder à l'étude des noyaux légers.

1.2.1.1 Calibration des spectromètres HRS du hall A

La connaissance précise de toute la cinématique des réactions qui seront étudiées dans le hall A de Jefferson Lab. est évidemment cruciale. Les paramètres à connaître avec précision sont : l'énergie incidente du faisceau, l'impulsion et les deux angles des particules détectées dans chacun des deux spectromètres ainsi que la position reconstruite du vertex. L'observation des spectres de masse manquante fournit des relations entre ces divers paramètres. Lorsque la réaction étudiée permet de définir un nombre suffisant de relations indépendantes (cas de la diffusion Compton virtuelle), il est possible, par un

15. PAC : Program Advisory Committee.

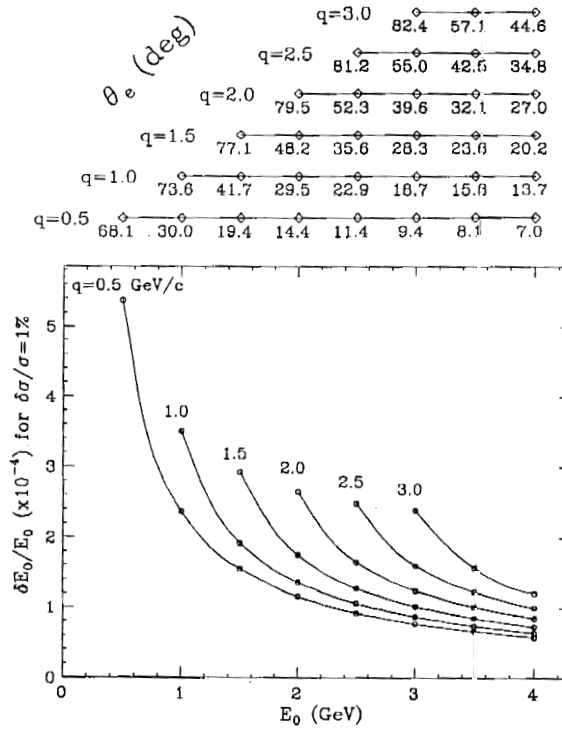


Figure 1.12 - Variation relative de l'énergie incidente induisant une variation de 1% de la section efficace $^2H(e,e'p)n$. E_0 est l'énergie du faisceau incident. Les cinématiques sont quasiélastiques ($\omega = q^2/|\vec{q}|^2 + 2.2\text{MeV}$) et $|\vec{p}_r| = 50\text{MeV}/c$. Les courbes, une pour chaque valeur de $|\vec{q}|$ de 0.5 à 3 GeV/c, ont été tracées à partir des points calculés. Les angles de diffusion de l'électron correspondants figurent sur les axes du haut de la figure. Chacune des valeurs se réfère respectivement au point situé sur la courbe en $|\vec{q}|$ correspondante. Cette figure est extraite de la référence [5].

processus de minimisation, de déterminer la partie systématique de l'erreur commise sur les différents paramètres. Ce processus de minimisation est délicat et toute information précise, telle l'énergie incidente du faisceau, contribuera à assurer la convergence du calcul.

1.3 Méthodes pour mesurer l'énergie avec une précision de 10^{-4}

Mesurer l'énergie absolue d'un faisceau délivré par un accélérateur linéaire avec une précision de 10^{-4} représente un véritable défi comparativement à une mesure de même précision réalisée dans un anneau de stockage. En effet, dans un anneau de stockage, pour mesurer avec précision l'énergie d'un faisceau de particules on peut, par exemple :

- mesurer la fréquence de passage des paquets lorsqu'il s'agit de particules non relativistes,
- mesurer la fréquence de dépolarisation résonante du spin pour les électrons (LEP¹⁶).

Dans le cas d'un accélérateur à faisceaux extraits comme CEBAF, ces méthodes ne peuvent être appliquées car le faisceau, une fois accéléré, est directement conduit vers les salles expérimentales, contrairement à un anneau de stockage dans lequel le faisceau circule en permanence à la même énergie.

Différentes méthodes [4] ont été proposées pour mesurer l'énergie du faisceau délivré par CEBAF au hall A avec une précision de 10^{-4} . A titre de contrôle, deux méthodes indépendantes sont requises. En tant que contributions techniques pour l'équipement du hall A, les laboratoires français CNRS/IN2P3/Clermont-Ferrand et CEA/DAPNIA ont pris à leur charge les deux mesures absolues d'énergie. Le laboratoire de Physique Corpusculaire de Clermont-Ferrand a choisi de développer la méthode “e-p” tandis que le CEA/DAPNIA a opté pour une méthode magnétique (projet “ARC”) après étude d'une méthode par rétrodiffusion Compton par ailleurs adoptée dans le hall C. En outre, on signale qu'une troisième méthode, basée sur la précession du spin d'électrons polarisés, est actuellement en cours d'étude à Jefferson Lab et pourrait être envisagée dans le futur pour contrôler ponctuellement les deux autres méthodes.

Avant de présenter la méthode “ARC” représentant mon travail de thèse, je décrirai brièvement les principes des autres méthodes citées puis m'étendrai plus longuement sur la méthode magnétique adoptée au SLAC¹⁷ afin de la comparer à “ARC”.

1.3.1 Méthode par rétrodiffusion Compton

Le principe de cette méthode [11] [12] consiste à envoyer un faisceau de photons issu d'un laser infrarouge contre le faisceau d'électrons. On mesure alors l'énergie des photons rétrodiffusés avec une précision de $2 \cdot 10^{-4}$ de sorte que l'énergie du faisceau d'électrons incident soit connue avec une précision de 10^{-4} . Dans l'étude de faisabilité [13], j'ai montré que cette méthode nécessitait de s'affranchir des photons de basse énergie émis par

16. LEP : Large Electron Positron au CERN, Genève.

17. SLAC : Stanford Laboratory Accelerator Center.

rayonnement synchrotron dans le dipôle permettant de dévier les électrons hors de la direction du détecteur de photons. Une des solutions proposées dans [13] était de protéger le détecteur de photons à l'aide d'un absorbeur en plomb. Nous n'avons pas retenu cette méthode car, dans l'hypothèse d'un faisceau de 6GeV, l'épaisseur de plomb nécessaire devenait trop importante. Cette méthode est actuellement en cours de test dans le hall C de Jefferson Lab.

1.3.2 Méthode “e-p”

Cette méthode originale de mesure absolue d'énergie par diffusion élastique $p(e,e'p)$ est l'initiative d'un groupe du laboratoire CNRS/IN2P3 de Clermont-Ferrand.

Le principe de cette méthode repose sur le fait que dans une réaction à deux corps deux variables cinématiques suffisent à caractériser toute la réaction. En particulier, dans la diffusion élastique $p(e,e'p)$, la mesure des angles des électrons (θ_e) et des protons (θ_p) sortants permet de remonter à l'énergie E_e du faisceau d'électrons incident par la relation :

$$E_e = M_p \left(\frac{\cos \theta_e + \frac{\sin \theta_e}{\tan \theta_p} - 1}{1 - \cos \theta_e} \right) \quad (M_p : \text{masse au repos du proton}) \quad (1.8)$$

La cible est un ruban de polypropylène animé d'un défilement continu pour éviter qu'il ne s'échauffe.

L'utilisation de deux systèmes de détection identiques (cf. figure 1.13), symétriques par rapport à la trajectoire du faisceau, permet de s'affranchir d'erreurs systématiques telles les incertitudes sur la position du faisceau et son angle d'incidence sur la cible en faisant la moyenne de l'énergie reconstruite par les deux systèmes de détection.

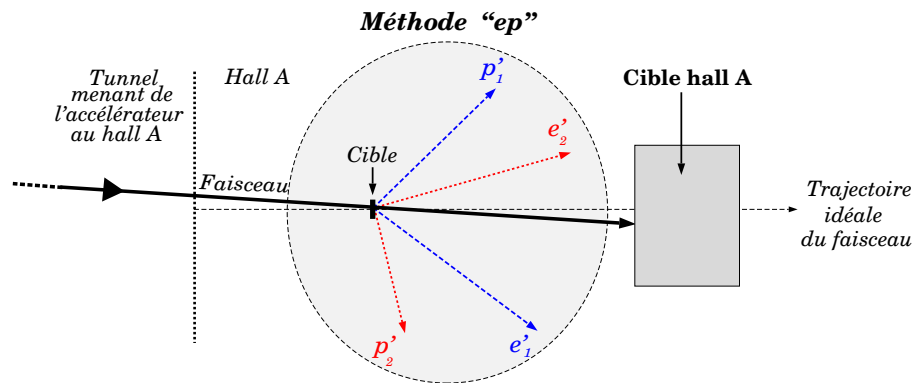


Figure 1.13 - Implantation de la méthode “e-p”. Les particules e'_1 et p'_1 proviennent d'une réaction, e'_2 et p'_2 d'une autre réaction.

Obtenir une précision de 10^{-4} sur la détermination de l'énergie nécessite de mesurer les angles des particules diffusées avec une précision de $10\mu\text{rad}$. Dans le but d'atteindre une telle précision angulaire, les positions des particules diffusées sont mesurées par des détecteurs semi-conducteurs à “micro-strips”. Deux compteurs Čerenkov à gaz assurent l'identification des électrons tandis que celle des protons s'effectue par mesure de temps

de vol entre deux paires de scintillateurs. La coïncidence entre l'électron et le proton ainsi identifiés déclenche l'acquisition des détecteurs semi-conducteurs. On notera que l'ensemble du système permettant le déclenchement a été réalisé par le CEA/DAPNIA.

Le dispositif associé à cette méthode est déjà implanté dans le hall A de Jefferson Lab et fait actuellement l'objet de tests. La mesure "e-p" sera opérationnelle dans le courant de l'année 1998. Pour une description complète de cette méthode on se reportera à la thèse d'Olivier Ravel [7] et à l'article [8].

1.3.3 Méthode basée sur la précession du spin d'électrons polarisés

Le principe de cette méthode, détaillé dans l'annexe F, consiste à faire varier la direction du spin des électrons polarisés au niveau de l'injecteur et mesurer l'angle entre le spin et l'impulsion des électrons à l'entrée des halls A et C grâce à des polarimètres existants. Au niveau de l'injecteur, on mesurera les angles θ_{iA} et θ_{iC} permettant de rendre les directions du spin et de l'impulsion des électrons perpendiculaires au niveau des polarimètres de telle sorte que l'hélicité soit nulle. La différence d'angles ($\theta_{iA} - \theta_{iC}$) divisée par l'angle absolu entre les directions du faisceau dans les halls A et C permet de remonter à l'énergie du faisceau. Un des avantages de cette méthode réside dans le fait qu'elle est indépendante de la connaissance de l'intégrale de champ magnétique le long des déviations du faisceau contrairement à la méthode ARC détaillée plus loin.

1.3.4 Méthode magnétique adoptée au SLAC

Pour la mesure de la masse du Z^0 au SLC (Stanford linear Collider), le SLAC a équipé les lignes de faisceau d'électrons et de positrons de deux spectromètres identiques, avec comme objectif une mesure absolue de l'énergie de chacun des faisceaux (d'environ 50 GeV) à $\pm 3.10^{-4}$ près. Cette installation est décrite en détail dans les références [14], [15] et [16]. Nous n'en donnons ici qu'une description simplifiée.

Chaque spectromètre est constitué d'un aimant principal, de 3.5T.m d'intégrale de champ, déviant verticalement le faisceau d'un angle de 18mradians ($\simeq 1^\circ$). La mesure simultanée de cet angle et de l'intégrale de champ conduit à la détermination de l'énergie du faisceau (ceci est démontré dans la section suivante). Cet aimant principal est précédé et suivi de deux aimants auxiliaires déviant horizontalement le faisceau. Les "bandes" de rayonnement synchrotron résultant de ces déviations, servent à la mesure de l'angle de déviation.

- Mesure de l'angle de déviation :

Les bandes de rayonnement synchrotron sont interceptées par des écrans fluorescents sur lesquels deux traits lumineux horizontaux séparés verticalement de 270 mm sont formés. Cette distance est déterminée à $\pm 28\mu\text{m}$ près par un système de caméras vidéo et de marques de références (grille métallique) équipant les écrans.

- Mesure de l'intégrale de champ :

Cette mesure repose sur une calibration absolue en laboratoire, faite une fois pour toutes, et d'une mesure relative en ligne.

- calibration absolue : deux méthodes ont été utilisées. Celle donnant la meilleure précision ($\pm 0.7 \cdot 10^{-4}$ sur l'intégrale de champ) est basée sur le principe d'un faisceau de fils tendus translaté dans l'entrefer de l'aimant (cf. chapitre 3 de ma thèse page 217).
- mesure relative : ici aussi deux méthodes ont été utilisées. La meilleure précision est donnée par une bobine intégrale tournante.

Les auteurs avancent une précision de 10^{-4} sur la connaissance absolue de l'intégrale de champ en ligne.

La combinaison de la mesure de l'angle de déviation, de celle de l'intégrale de champ et de diverses erreurs d'alignement conduit à une précision finale de $\pm 4 \cdot 10^{-4}$ sur la mesure absolue de l'énergie du faisceau.

1.4 Méthode magnétique : projet “ARC”

Retenue dans le hall A pour mesurer l'énergie avec une précision de 10^{-4} , cette méthode a été entièrement conçue et développée au CEA/DAPNIA. Elle est dite magnétique car elle s'appuie sur une déviation magnétique de $34^\circ 3'$ du faisceau située sur la ligne menant le faisceau de l'accélérateur au hall A. Cette déviation magnétique d'environ 50m de long, schématisée sur la figure (1.14), est constituée de dipôles principaux, de dipôles de correction, de quadripôles et de sextupôles assurant le transport du faisceau jusqu'à la cible du hall A. Cette ligne faisceau est décrite dans l'annexe G. Seuls les huit dipôles principaux, responsables de la déviation du faisceau dans le plan horizontal, sont représentés sur la figure (1.14). Dans la suite, on appellera **arc** la déviation formée par ces huit dipôles.

L'idée pour mesurer l'énergie du faisceau d'électrons avec précision est d'utiliser cet arc de déviation magnétique comme un spectromètre. Dans le cas où cet arc est réglé en mode dispersif, l'énergie absolue du faisceau E_e s'obtient par la relation :

$$E_{e[\text{eV}]} = c \frac{\int B_{\perp} dl_{\parallel}}{\theta_{\parallel}} \quad (1.9)$$

B_{\perp} est la composante verticale du champ magnétique exprimée en Teslas, dl_{\parallel} est l'élément de longueur de trajectoire projeté sur le plan horizontal et θ_{\parallel} est l'angle de déviation dans le plan horizontal. Les notations \perp et \parallel se réfèrent au plan horizontal. Comme les électrons sont ultra-relativistes : $m_e^2 c^4 \ll p^2 c^2$, $pc \simeq E_e$. On note qu'à CEBAF le réglage standard de l'arc est achromatique¹⁸ mais qu'il est également possible de le faire fonction-

18. Réglage achromatique : un point le long de la ligne faisceau est dit achromatique lorsque ni les angles, ni les positions transverses des particules ne sont corrélés au premier ordre avec leur impulsion. Si ces conditions ne sont pas remplies, le point le long de la ligne est dit dispersif. A l'entrée de l'arc, le faisceau est achromatique. Les dipôles ont la propriété de le rendre dispersif. Un réglage particulier des quadripôles équipant l'arc, appelé réglage achromatique, est capable de restaurer les conditions d'achromatisme à la sortie de l'arc bien que le faisceau reste dispersif à l'intérieur de l'arc.

ner en mode dispersif sans perturber les expériences. Le réglage dispersif utilisé consiste à couper les quadripôles, sextupôles et les dipôles de corrections présents dans l'arc, seuls les huit dipôles principaux sont alimentés. On note qu'un réglage achromatique ne permettrait pas de mesurer en absolu l'énergie et nécessiterait en outre de connaître avec une précision de l'ordre de 10^{-5} le champ magnétique le long de la ligne de transport du faisceau (quadripôles compris).

La méthode ARC repose sur la relation (1.9) et consiste donc à mesurer en absolu l'angle de déviation du faisceau et l'intégrale de champ magnétique le long de la trajectoire des électrons dans cet arc. On souligne que le caractère absolu de cette méthode provient du fait qu'elle est insensible à la position exacte des dipôles le long de la trajectoire des électrons car les dipôles de l'arc sont à champ uniforme et à faces parallèles.

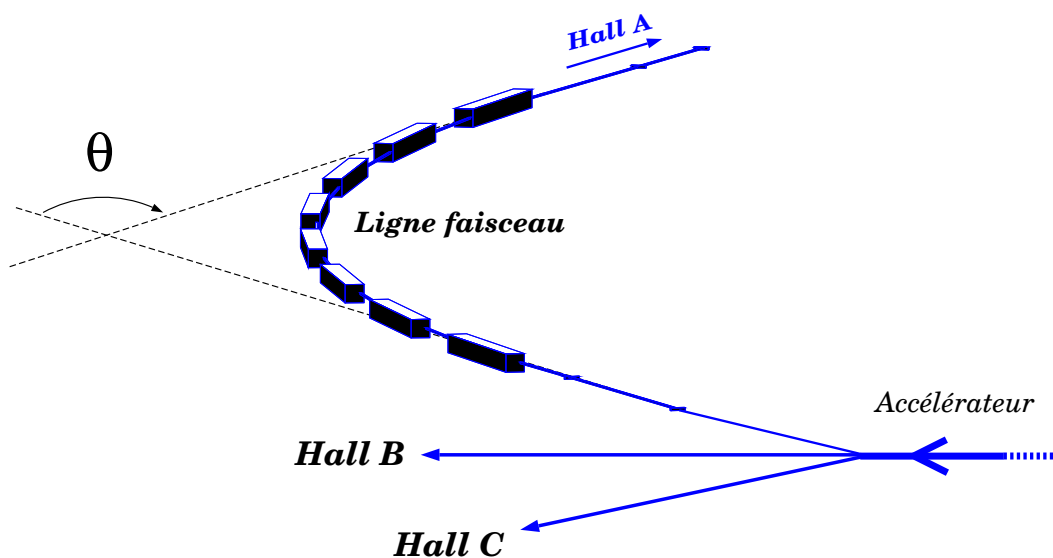


Figure 1.14 - Schéma des lignes faisceau conduisant aux trois halls expérimentaux de Jefferson Lab. Pour la ligne du hall A, on a représenté les huit dipôles identiques générant une déviation θ de $34^\circ 3$ du faisceau.

Dans un premier temps, nous établirons la relation (1.9) puis évaluerons les pertes d'énergies dues au rayonnement synchrotron dans l'arc. Nous terminerons ce chapitre en présentant le principe adopté pour mesurer précisément l'angle de déviation du faisceau et l'intégrale de champ magnétique et nous comparerons notre méthode à celle développée au SLAC il y a quelques années (cf. paragraphe 1.3.4).

1.4.1 Généralités

Dans cette partie nous proposons de rappeler les relations qui vont nous servir dans la suite et nous définirons les variables employées.

Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique :

En toute généralité, une portion de ligne de transport de faisceau (ou un spectromètre magnétique) peut être vue comme une distribution de champ magnétique statique $\vec{B}(\vec{r})$. En conséquence, la trajectoire d'un électron individuel est solution de l'équation différentielle dérivant de la force de Lorentz :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{S.I.} \quad (1.10)$$

avec :

$p = \gamma m_e \beta c$: impulsion de l'électron,

$q = -|e|$: charge de l'électron,

$v = \beta c$: vitesse de l'électron.

Nous ne nous intéressons pas à la partie temporelle du mouvement de l'électron mais seulement à sa trajectoire. On remplace donc dt par $\frac{ds}{\beta c}$ où ds est l'élément de trajectoire curviligne. Le rayon de courbure instantané de la trajectoire (ρ) s'écrit :

$$\rho^{-1} = \frac{1}{p} \left| \frac{d\vec{p}}{ds} \right| \quad (1.11)$$

d'où :

$$p = |e| B_- \rho \quad (1.12)$$

avec B_- le module de la composante de \vec{B} normale à \vec{p} .

Dans le cas ultra-relativiste, cas de notre application ($\gamma \simeq 8.10^3$ à 4GeV), on a :

$$E_e \simeq pc = (|e|c) B_- \rho \quad (1.13)$$

Pour utiliser les unités naturelles de E_e et pc (en GeV par exemple), $(|e|c)$ prend la valeur $0.299 \text{ GeV.T}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

Dans chacun des dipôles de l'arc, le champ magnétique est vertical descendant. Les électrons destinés au hall A sont, par conséquent, déviés vers la droite conformément à la figure (1.14). Le vecteur vitesse des électrons pouvant présenter un petit angle avec le plan horizontal, le faisceau décrit une hélice dont la projection sur le plan horizontal est un arc de cercle de rayon ρ .

En multipliant les deux membres de (1.13) par $d\theta$, on obtient :

$$E_e d\theta = (|e|c) B_- (\rho d\theta) \quad (1.14)$$

Or, $\rho d\theta = dl_{//}$ avec $dl_{//}$ élément de longueur de la trajectoire du faisceau en projection sur le plan horizontal.

En supposant, dans un premier temps, que l'énergie est conservée tout au long du transport dans la ligne de déviation, l'intégration de (1.14) conduit à l'équation :

$$E_e = (|e|c) \frac{\int_0^l B_- dl_{//}}{\theta_{//}} \quad (1.15)$$

avec θ (en radians) l'angle de déviation du faisceau entre l'entrée et la sortie d'un seul dipôle. Comme nous nous appuyons sur la déviation magnétique constituée des huit dipôles principaux, l'énergie du faisceau s'obtient par la relation ::

$$E_{e_{[GeV]}} = 0.299792 \frac{\sum_{i=1}^8 \int_0^l B_- dl_{//}}{\theta_{//}} \quad (1.16)$$

avec θ représentant cette fois l'angle total de déviation entre l'entrée et la sortie de l'arc de déviation ($\theta \simeq 34^\circ 3$) et $\sum_{i=1}^8 \int_0^l B_- dl_{//}$ l'intégrale de champ magnétique le long de la trajectoire dans le plan horizontal des électrons dans l'arc.

Jusque là, nous avons considéré que l'énergie des électrons était conservée le long de l'arc de déviation. Evaluons les pertes d'énergie du faisceau par rayonnement synchrotron dans l'arc menant au hall A et voyons si, pour déterminer l'énergie absolue du faisceau avec une précision de 10^{-4} , celles-ci peuvent être négligées ou bien s'il faut les traiter en tant que perturbation.

1.4.2 Evaluation des pertes d'énergie par rayonnement synchrotron dans l'arc de déviation

Etant donné que les mesures pour la détermination de l'angle total de déviation s'effectuent de part et d'autre de l'arc de déviation, nous devons nous assurer que les pertes d'énergie que subit le faisceau par rayonnement synchrotron dans la déviation magnétique sont très inférieures à la précision de 10^{-4} requise sur l'énergie.

En se reportant à [17] et [18], la perte d'énergie moyenne ΔE_e que subit un électron ultrarelativiste d'impulsion initiale p_0 , dévié d'un angle $\Delta\theta$ par un champ magnétique uniforme, s'écrit :

$$\Delta E = \frac{2}{3} r_e m_e c^2 \frac{\beta^3 \gamma^4}{\rho} \Delta\theta \quad (1.17)$$

$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.818 \cdot 10^{-15} \text{m}$: rayon classique de l'électron, e la valeur absolue de sa charge,

$m_e = 0.511 \cdot 10^{-3} \text{GeV}/c^2$: masse de l'électron,

$\beta = |p|c/E_e$,

$\gamma = E_e/m_e c^2$,

Dans le cas ultrarelativiste ($\beta = 1$) :

$$\Delta E_e = 1.408210^{-5} \frac{\Delta\theta E_e^4}{\rho} \quad [\text{m, rad, GeV}] \quad (1.18)$$

La perte d'énergie effective est distribuée autour de cette valeur moyenne. L'écart-type de cette distribution est :

$$\delta E_e = \left(\frac{8}{15 \alpha \sqrt{3}} r_e^2 (m_e c^2)^2 \frac{\beta^6 \gamma^7}{\rho^2} \Delta \theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

$$(\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137)$$

Dans le cas ultrarelativiste ($\beta = 1$) :

$$\delta E_e = \left(9.616910^{-12} \frac{\Delta \theta E_e^7}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [\text{m, rad, GeV}] \quad (1.20)$$

Application à l'arc de déviation :

La déviation est générée par huit dipôles identiques à faces parallèles. Le champ magnétique est tel que chacun de ces dipôles dévie le faisceau d'un angle de 4.286° (0.07rad) quelle que soit l'énergie du faisceau.

Soit p_0 l'impulsion du faisceau à l'entrée de l'arc. Si α représente la perte d'énergie relative par unité de longueur, l'impulsion du faisceau, après une distance l parcourue dans un dipôle, sera :

$$p = p_0(1 - \alpha l) \quad (1.21)$$

On exprimera alors θ , l'angle dont dévie le faisceau dans un dipôle, sous la forme :

$$\theta = \int_0^L \frac{B_- dl_{//}}{p} = \int_0^L \frac{B_- dl_{//}}{p_0(1 - \alpha l)} \simeq \int_0^L \frac{B_- dl_{//}}{p_0} (1 + \alpha l) \quad (1.22)$$

En considérant un champ magnétique uniforme en fonction de l , après intégration de (1.22) par rapport à l , on obtient :

$$\theta = \theta_0 \left(1 + \frac{\alpha L}{2} \right) \quad (1.23)$$

avec θ_0 l'angle dont dévierait le faisceau s'il ne perdait pas d'énergie au passage dans un dipôle.

D'après (1.23), on constate que la perte d'énergie à considérer est la moitié de la perte d'énergie totale (αL) pour un parcours L dans un dipôle. Les pertes d'énergie par rayonnement synchrotron dans l'arc de déviation pour différentes énergies de faisceau sont présentées dans le tableau (1.3) suivant :

On constate donc que pour des énergies de faisceaux inférieures ou égales à 8GeV il ne sera pas nécessaire de prendre en compte les pertes d'énergie par rayonnement synchrotron dans l'arc de déviation pour obtenir une précision de 10^{-4} sur l'énergie du faisceau.

On signalera, par ailleurs, qu'entre la sortie de l'arc et la cible du hall A est placé le polarimètre Compton utilisant une chicane magnétique. Cette chicane est constituée de 4

Energie du faisceau (GeV)	B(T)	ΔE (GeV)	$\Delta E/E$	δE (GeV)	$\delta E/E$
0.5	0.0416	$6.6 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$0.9 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$
4.0	0.3328	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$3.4 \cdot 10^{-7}$
6.0	0.4989	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-6}$	$9.3 \cdot 10^{-7}$
8.0	0.6652	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$

Tableau 1.3 - *Perte d'énergie par rayonnement synchrotron dans l'arc de déviation.*

dipôles identiques différents de ceux de l'arc. La perte d'énergie par rayonnement synchrotron dans cette chicane représente 46KeV pour un faisceau de 4GeV soit ($\Delta E/E \simeq 1.10^{-5}$) et $7.4 \cdot 10^{-4}$ GeV à 6GeV soit ($\Delta E/E \simeq 9.10^{-5}$). Au delà de 6GeV, pour tenir compte de cette perte d'énergie, il sera nécessaire d'appliquer un facteur correctif à l'énergie mesurée dans l'arc pour connaître avec la précision requise l'énergie du faisceau interagissant avec la cible du hall A. Cette correction s'effectuera au niveau du programme d'analyse de la mesure d'énergie.

1.4.3 Principe de la méthode ARC et précisions requises sur les mesures

Le but de ce paragraphe est de présenter de façon très générale le principe de la méthode ARC à titre d'introduction aux chapitres qui suivent. On rappelle que, par la méthode ARC, l'énergie absolue s'obtient par la relation (1.16). Cette méthode se décompose donc en deux mesures absolues distinctes de très haute précision :

- mesure absolue de l'angle total de déviation du faisceau θ dans l'arc en projection sur le plan horizontal,
- mesure absolue de l'intégrale de champ magnétique le long de la trajectoire dans le plan horizontal du faisceau dans l'arc de déviation.

Notre objectif est d'effectuer ces deux mesures absolues avec une précision de quelques 10^{-5} de façon à obtenir une précision de 10^{-4} sur l'énergie du faisceau. La figure [1.15] synthétise le principe général de la méthode ARC.

1.4.3.1 Mesure de l'angle total de déviation du faisceau

L'angle total de déviation du faisceau s'obtient par la mesure ponctuelle d'**un angle de référence** de déviation du faisceau et la mesure en ligne des déviations du faisceau à cet angle de référence (**angle relatif**).

La mesure de l'angle de référence (d'environ $34^\circ 3$) s'effectue en l'absence du faisceau par une méthode optique d'autocollimation.

Par ailleurs, on mesure la direction du faisceau, en amont et en aval de l'arc, relativement aux axes utilisés pour la mesure de l'angle de référence, par l'intermédiaire de deux profileurs à fils (figure [1.15]). De façon à obtenir une précision suffisante sur l'angle incident (resp. sortant) du faisceau, les deux profileurs sont distants de 4m environ. Ces

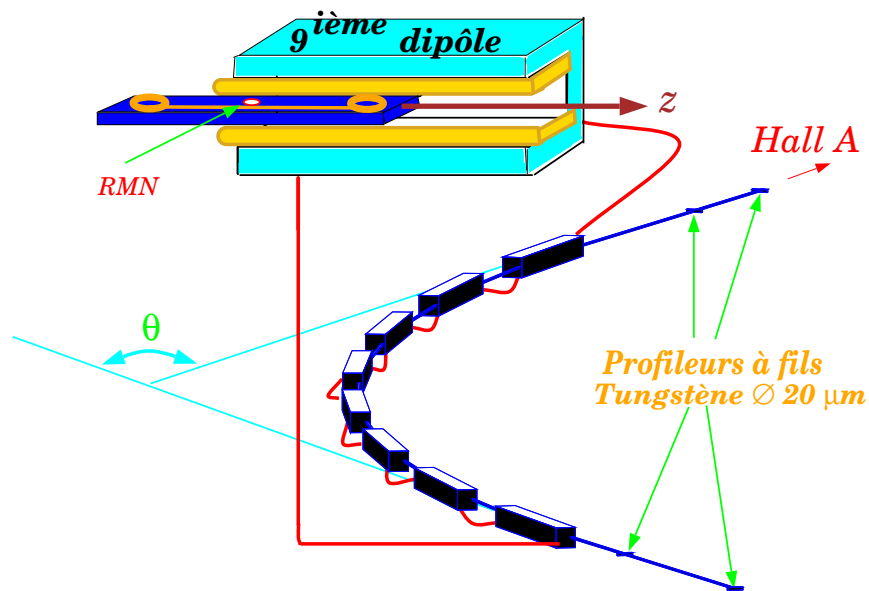


Figure 1.15 - Principe général de la méthode ARC

profileurs à fils permettent de mesurer la position absolue du faisceau dans le plan transverse à sa trajectoire dans le plan horizontal. On signale que ces profileurs à fils rendent notre méthode destructive, ce qui signifie que l'énergie ne peut pas être mesurée en même temps que l'acquisition d'une expérience dans le hall A. Nous verrons dans le chapitre 2 comment, dans le futur, y remédier.

Soit θ_i (resp. θ_f) l'angle relatif du faisceau mesuré à l'entrée (resp. à la sortie) de l'arc et θ_{ref} , l'angle de référence. On souligne que les angles relatifs sont mesurés chaque fois que l'on désire déterminer l'énergie du faisceau. A partir de ces définitions, nous verrons (cf. chapitre 2) que l'angle de déviation du faisceau s'obtient par la relation :

$$\theta = \theta_i + \theta_f + \theta_{ref}. \quad (1.24)$$

Mesurer cet angle total de déviation du faisceau θ à quelques 10^{-5} près signifie être capable de mesurer cet angle, d'environ $34^\circ 3'$, à $6 \mu\text{rad}$ près soit $1''$ d'arc. Le principe détaillé de cette mesure est présenté dans le chapitre 2 de ce document.

1.4.3.2 Mesure de l'intégrale de champ magnétique

Comme pour l'angle de déviation, nous nous appuyons sur **une intégrale de référence** de champ magnétique et **une intégrale relative** de champ. Le principe de ces deux mesures fait l'objet du chapitre 3.

L'intégrale de référence correspond à l'intégrale de champ d'un dipôle de référence, identique aux huit dipôles de l'arc et alimenté en série avec eux (figure [1.15]). A la différence des dipôles de l'arc, ce dipôle de référence est situé à l'extérieur de l'arc et ne reçoit donc pas de faisceau. Son entrefer est équipé d'un dispositif de mesure capable de déterminer son intégrale de champ à quelques 10^{-5} près chaque fois que l'on désire procéder à

une mesure de l'énergie.

L'intégrale relative de champ consiste à mesurer à différents courants la différence entre l'intégrale de champ de chacun des huit dipôles de l'arc et celle du dipôle de référence. Pour cette mesure ponctuelle, les huit dipôles de l'arc sont extraits du tunnel. L'appareil utilisé a été conçu à Jefferson Lab. en 1991 et a servi à calibrer tous les dipôles de l'accélérateur. Notre but est d'employer ce même dispositif pour le dipôle de référence ainsi que les huit dipôles de l'arc.

Une fois l'angle de référence et l'intégrale relative de champ connus, l'énergie absolue du faisceau d'électrons s'obtient par la mesure simultanée de l'intégrale de référence de champ magnétique et des angles relatifs à l'entrée et à la sortie de l'arc.

1.4.4 Comparaison ARC / SLAC

A partir du principe général du projet ARC que nous venons de présenter, il est intéressant de comparer notre méthode à celle adoptée au SLAC pour mesurer l'angle de déviation du faisceau et l'intégrale de champ.

Intégrale de champ :

Situons notre méthode de mesure par rapport aux différents degrés d'approximation utilisables pour mesurer une intégrale de champ "en ligne", correspondant à des exigences de précisions croissantes.

– 1^{er} degré d'approximation :

L'intégrale de champ est supposée proportionnelle au courant d'excitation de l'aimant : il suffit de mesurer cette intégrale de champ une fois pour toutes à un courant fixé, puis de mesurer en ligne le courant pour déterminer l'intégrale de champ effectivement vue par le faisceau.

– 2^{ème} degré d'approximation :

On prend maintenant en compte le champ d'aimantation coercitif de l'aimant. La procédure précédente est conservée, mais en plus chaque utilisation de l'aimant doit être précédée d'une procédure de dégaussage. Le point de fonctionnement doit se situer sur une branche donnée (branche de courant croissant ou décroissant) du cycle d'excitation.

– 3^{ème} degré d'approximation :

Nous prenons maintenant en compte la saturation de l'aimantation du fer. Désormais, la relation (intégrale de champ - courant) n'est plus linéaire mais elle est déterminée par interpolation, pour chaque valeur du courant entre une série de valeurs de l'intégrale mesurée dans tout le domaine de variation du courant.

– 4^{ème} degré d’approximation :

La relation (intégrale de champ - courant) est maintenant affectée d’un défaut de reproductibilité irréductible. C’est dans cette optique qu’ont été conçues les mesures d’intégrale de champ du SLAC et de CEBAF/ARC.

La méthode du SLAC consiste à équiper l’aimant d’un système de mesure de l’intégrale, situé à coté du tube faisceau, capable seulement d’une bonne précision relative mais non pas absolue. La relation entre l’intégrale absolue à l’emplacement du faisceau et de l’intégrale relative sur la position déportée est fournie par une mesure absolue, faite une fois pour toutes, en laboratoire, pour une série de courants d’excitation.

La méthode ARC consiste à ajouter un nouvel aimant (“de référence”), alimenté en série avec les aimants déviant le faisceau et aussi identique que possible à ces aimants. La mesure absolue de l’intégrale de champ est faite en ligne dans l’aimant de référence, sur l’emplacement théorique du faisceau. La relation entre cette intégrale et celle des aimants déviant le faisceau est mesurée une fois pour toutes, en laboratoire, et pour une série de courants d’excitation. Pour ce qui est de sa partie magnétique, la méthode ARC est donc basée sur l’identité des défauts de reproductibilité dans la relation (intégrale de champ - courant) entre deux aimants identiques alimentés en série.

Angle de déviation :

Du point de vue de la mesure de l’angle, la différence entre les deux méthodes est radicale : l’angle de déviation du faisceau est de 1° au SLAC et de 34.3° à CEBAF/ARC. Il est clair que les techniques utilisées pour mesurer ces angles seront très différentes.

Il est utile de préciser que si ces deux projets, à partir d’objectifs voisins, ont conduit à des réalisations très différentes, ce n’est pas tant par souci d’originalité mais du fait des différences entre les possibilités d’implantation offertes par les deux accélérateurs. Par exemple, il aurait été difficile le long de la ligne-faisceau de CEBAF de trouver la place pour implanter un système de spectromètre du même type que celui installé au SLAC.

Chapitre 2

Angle absolu de déviation du faisceau

On détermine l'angle absolu de déviation du faisceau dans le plan horizontal en deux étapes : mesure d'un angle de référence de déviation du faisceau et mesure d'un angle relatif :

- l'angle de référence de déviation du faisceau θ_{ref} est l'angle formé entre deux directions arbitraires proches des directions nominales du faisceau en amont et en aval de l'arc, cf. figure [2.1]. Sa valeur est de l'ordre de 34° . Les directions arbitraires sont appelées “directions de référence” d'amont et d'aval selon qu'elles se réfèrent à l'entrée ou à la sortie de l'arc de déviation.
- l'angle relatif est l'écart entre l'angle de référence et l'angle de déviation réel du faisceau θ . C'est la somme des angles relatifs d'amont (θ_i) et d'aval (θ_f), cf. figure [2.1]. L'angle relatif d'amont θ_i (resp. d'aval θ_f) est l'angle formé entre la direction du faisceau à l'entrée (resp. à la sortie) de l'arc et la direction de référence d'amont (resp. d'aval). L'angle relatif, valant quelques dixièmes de degrés, est mesuré à chaque mesure d'énergie.

Par souci de clarté, nous choisissons de décrire d'abord la méthode adoptée pour mesurer l'angle relatif. Une deuxième partie sera consacrée à la méthode que nous avons utilisée pour mesurer l'angle de référence. Finalement, dans une dernière partie, après avoir relié ces deux mesures dans le but de déterminer l'angle absolu de déviation du faisceau à un instant donné, nous passerons en revue les différentes sources d'erreur et concluerons sur la précision de l'angle de déviation du faisceau.

2.1 Mesure de l'angle relatif

Chaque angle relatif, d'amont et d'aval, s'obtient à partir de deux mesures de position en deux points aussi éloignés que possible. Pour déterminer la position transverse du faisceau dans le plan horizontal, on utilise un profileur à fil. Ainsi, la mesure des angles relatifs d'amont et d'aval nécessite l'emploi de deux paires de profileurs : une paire est située en amont de l'arc et la seconde en aval de l'arc. Les deux profileurs d'une même paire (paire d'amont et paire d'aval) sont placés aux extrémités d'un support rigide appelé banc de mesure. Chaque profileur comporte un ensemble de trois fils capable d'une translation

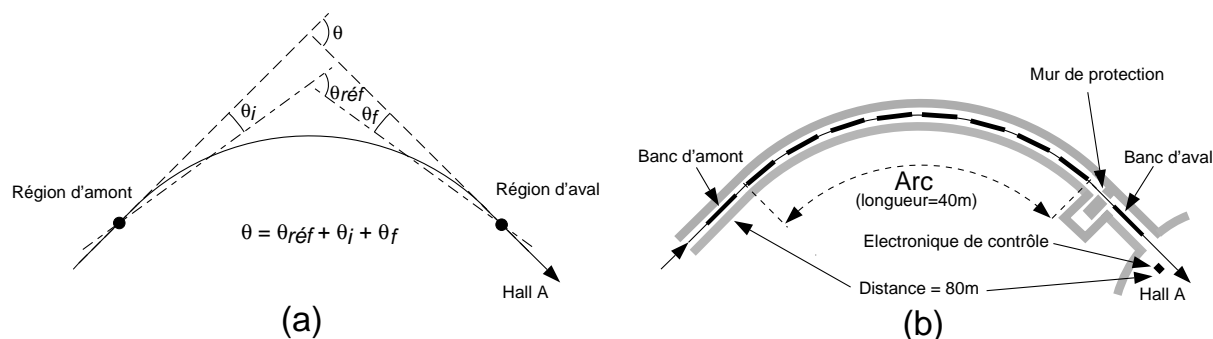


Figure 2.1 - a) Définition des angles : angle absolu de déviation du faisceau (θ), angle de référence ($\theta_{réf}$), angle relatif d'amont (θ_i) et angle relatif d'aval (θ_f). b) Vue de dessus schématisée de l'arc de déviation du faisceau. Pour la détermination de l'angle absolu de déviation du faisceau, on a installé un banc de mesure de part et d'autre de l'arc : banc d'amont et banc d'aval. Tous les angles représentés sur cette figure sont positifs.

dans la direction horizontale transverse au faisceau. L'ensemble mobile constitué des trois fils évolue dans une enceinte à vide connectée à celle du faisceau. Chaque profileur porte une mire située à l'extérieur de l'enceinte à vide. Les mires des deux profileurs situés sur un même banc de mesure sont visibles par le théodolite¹ (cf. section 2.2) placé au milieu du banc. Ces mires permettent de relier la mesure de l'angle relatif à celle de l'angle de référence.

Après description des bancs de mesure, nous nous consacrerons aux profileurs à fils. Nous expliquerons comment, à partir des profils de faisceau recueillis, nous déterminons la position du barycentre du faisceau pour ensuite calculer l'angle relatif.

2.1.1 Bancs de mesure

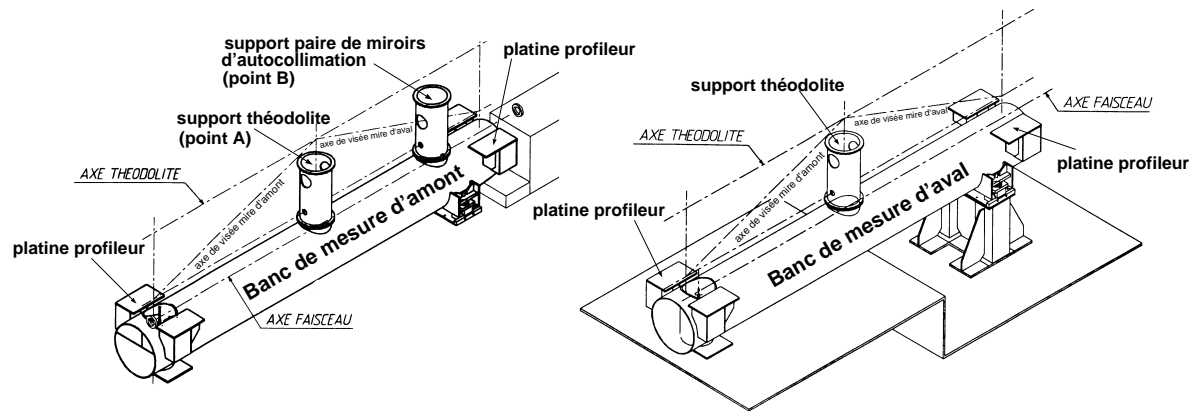
Les deux bancs de mesure sont situés de part et d'autre de l'arc sur des parties rectilignes, cf. figure [2.1]. Leur longueur correspond au maximum autorisé par l'espace disponible aux extrémités de l'arc de façon à obtenir la meilleure précision possible sur les angles relatifs d'amont et d'aval.

Principales caractéristiques :

Ces bancs de mesure, de forme cylindrique pour la rigidité, sont en acier et reposent sur trois pieds rotulants dont deux ont la liberté d'accepter une dilatation thermique différentielle du banc par rapport au sol. Nous les avons remplis à moitié de sable pour amortir d'éventuelles vibrations. Ils ont subi un traitement thermique pour assurer leur stabilité à long terme. D'autres caractéristiques des bancs figurent dans le tableau (2.1) et ils sont représentés sur la figure [2.2].

1. Lunette optique capable de mesurer des angles dans le plan horizontal et dans le plan vertical. Cet instrument est détaillé dans l'annexe I page 289.

Caractéristiques	Banc d'amont	Banc d'aval
\varnothing extérieur du cylindre (mm)	508.00	508.00
\varnothing intérieur du cylindre (mm)	501.65	501.65
Longueur du cylindre (mm)	4305.3	4000.5
Poids sans sable (kg)	520	500
Hauteur du faisceau / sol (mm)	694	1325
Hauteur de l'axe du théodolite / faisceau (mm)	692.2	692.2

Tableau 2.1 - *Caractéristiques des bancs de mesure d'amont et d'aval.*Figure 2.2 - *Vue axiométrique des bancs de mesure d'amont et d'aval.*

Rôle des bancs de mesure :

Les bancs de mesure sont les supports stables des trois objets qui nous intéressent : les deux profileurs à fils et le théodolite. On note sur la figure [2.2] que le banc d'amont supporte également une paire de miroirs utile pour la mesure de l'angle de référence, cf. section 2.2.

2.1.2 Les profileurs à fils

2.1.2.1 Principe de mesure de la position du faisceau

Lorsqu'un fil métallique traverse un faisceau d'électrons relativistes, il se développe une gerbe électromagnétique de demi-angle d'ouverture de l'ordre de $1/\gamma$ ($1/\gamma = m_e/E \simeq 10^{-3}$ à 10^{-4} rad). Cette gerbe (électrons, positrons, photons) accompagne le faisceau jusqu'à ce qu'elle intercepte le tube à vide (acier inoxydable, $\varnothing 25.4\text{mm}$), soit à la suite d'une déviation magnétique, soit du simple fait de son angle d'émission. Une gerbe secondaire se développe alors, beaucoup plus intense que la première du fait de la quantité de matière traversée. Le niveau de radiation dans le tunnel augmente alors suffisamment pour être détecté par un simple dosimètre à photomultiplicateur. Cet appareil est un photomultiplicateur utilisé sans scintillateur ni autre source de lumière. Les radiations électromagnétiques sont détectées par effet Čerenkov dans le verre de la photocathode. Les impulsions du dosimètre ne sont pas comptées individuellement mais c'est la tension de

sortie du tube qu'on échantillonne périodiquement. Nous disposons d'un seul dosimètre par paire de profileurs qui est situé à 10-20m en aval de chacun des bancs de mesure et à une distance de 20-50cm du tube faisceau.

Le principe de mesure de la position du faisceau consiste donc à commander la translation d'un fil métallique de telle sorte qu'il croise le faisceau. Au cours de ce mouvement, on acquiert simultanément et à intervalles réguliers deux informations : la position du fil et la tension détectée par le dosimètre. Le franchissement du faisceau par le fil se manifeste par un pic en tension. La localisation de ce pic nous permet de remonter à la position absolue du barycentre du faisceau. Pratiquement, on translate horizontalement un fil vertical. Cette combinaison assure une précision optimum sur la mesure de la position horizontale transverse du faisceau. Le fil que l'on utilise est en tungstène (Longueur de radiation : $X_0^W = 3.5\text{mm}$), son diamètre étant de $21\mu\text{m}$, l'épaisseur traversée en unité de longueur de radiation est de $6 \cdot 10^{-3}$.

Pour des raisons de diagnostics du faisceau qui ne sont pas directement liées à la mesure de l'énergie, nous avons également équipé nos profileurs de deux fils en tungstène supplémentaires inclinés à 45° par rapport à la direction de déplacement. Ces deux fils supplémentaires serviront à localiser le faisceau verticalement. Les trois fils sont dans le plan vertical transverse à la direction du faisceau.

2.1.2.2 Description du profileur à fil

La figure [2.3] schématise le profileur à fil que nous avons conçu² et réalisé pour mesurer la position du barycentre du faisceau. L'objectif est de mesurer cette position avec une précision de $15\mu\text{m}$.

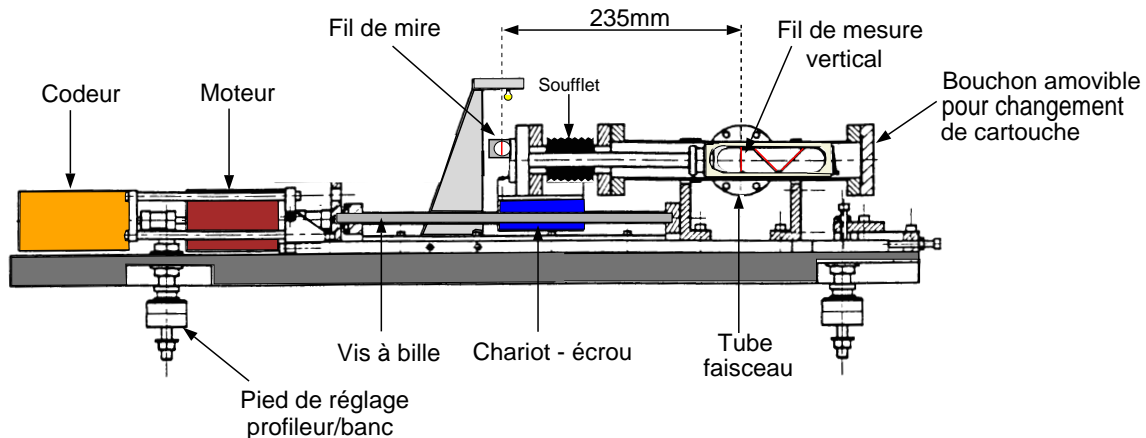


Figure 2.3 - Coupe transverse du profileur à fil adopté pour le projet ARC (“ARC Scanner”). L'équipage mobile est représenté en position de référence : le fil de mesure vertical est sur l'axe du faisceau nominal.

2. Services SGPI, SIG et SPhN du DAPNIA.

Un arbre commun relie le codeur, le moteur et la vis à bille. La translation du chariot est guidée par un rail à bille de précision. La vis à bille actionne par l'intermédiaire d'un écrou l'équipage mobile constitué d'un porte-cartouche recevant une cartouche porte-fil amovible.

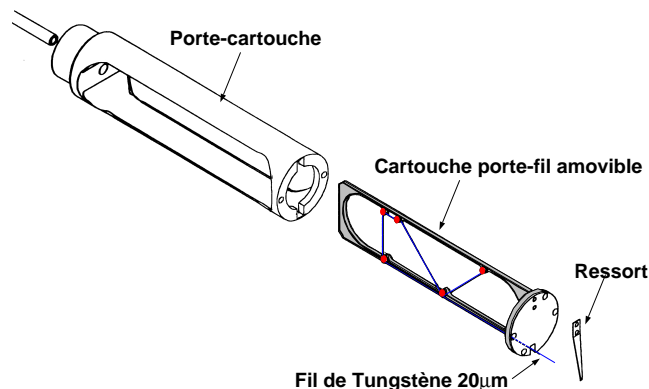


Figure 2.4 - *Porte-cartouche et cartouche porte-fil.*

Cet ensemble pénètre dans l'enceinte à vide grâce à un soufflet à coupelles soudées. Une mire de visée, constituée d'un fil vertical (tungstène, $\varnothing 33\mu\text{m}$), est également solidaire de l'équipage mobile mais elle est située dans l'air de telle sorte qu'on puisse la viser. Nous l'avons placée à faible distance du plan horizontal contenant le faisceau de manière à minimiser les erreurs de report. La distance qui sépare le fil vertical dans l'air (mire) et le fil vertical dans le vide, mesurée parallèlement à l'axe de translation, est d'environ 235mm. Cette distance a été mesurée pour tous les profileurs avec une précision de $5\mu\text{m}$ à l'aide d'une machine-outil équipée d'une lunette optique et de codeurs linéaires.

Les principales caractéristiques des éléments constitutifs du profileur sont présentées dans le tableau (2.2).

2.1.2.3 Position de repos et position de référence

Les positions de l'équipage mobile sont repérées par la valeur qu'affiche le codeur. Deux positions sont particulières :

- la position de repos correspondant à un affichage de 4096. Dans cette position, les trois fils sont dégagés du faisceau où que ce dernier se trouve dans un diamètre de 25.4mm. Pour réduire les erreurs systématiques, nous effectuons des mesures à l'aller et au retour du déplacement. La position de repos est la position de départ des trajets aller et d'arrivée des trajets retour.
- la position de référence correspondant à un affichage de 118407. L'équipage mobile se trouve alors à 69.77mm de la position de repos. Dans cette position, le fil vertical sous vide est au centre du tube faisceau donc proche de l'endroit où le faisceau

<u>Codeur :</u>	Type : angulaire absolu Résolution : $(\frac{1}{4096}) \times \text{tour}$ ($0.6\mu\text{m}$ en translation)
<u>Moteur :</u>	Type : pas à pas Nombre de pas par tour : 200 Nombre de micropas par pas : 10
<u>Vis à bille :</u>	Matériau : acier Pas : 2.5mm
<u>Mouvement :</u>	Direction du mouvement : 0° (horizontal) Course : 81mm
<u>Fils sous vide :</u>	Matériau : Tungstène Diamètre : $21\mu\text{m}$ Nombre de fils : 3 Tension des fils : 0.3N Angles : 90° (fil vertical), $+45^\circ$, -45°
<u>Distance entre deux profileurs d'un même banc :</u>	Banc d'amont : 3962mm Banc d'aval : 3708mm

Tableau 2.2 - *Caractéristiques des éléments principaux du profileur.*

est attendu. La mire est alors dans sa position de visée pour la mesure de l'angle de référence, cf. section 2.2. La direction de référence d'amont (resp. d'aval) est définie comme la direction de l'axe horizontal passant par les deux fils visibles dans l'air (mires) appartenant aux profileurs d'amont (resp. d'aval) lorsque les équipages mobiles sont à leur position de référence.

2.1.2.4 Electronique et contrôle-commande associés

Le schéma représenté sur la figure [2.5] illustre la chaîne électronique que nous avons constituée³ pour commander le déplacement du profileur et acquérir sa position horizontale ainsi que la tension détectée par le dosimètre.

Pour le contrôle-commande des profileurs et de l'acquisition associée nous avons adopté du point de vue matériel le standard VME (Versa Module Europe) et du point de vue logiciel EPICS (Experimental Physics and Industrial Control System), cf. annexe H.

- Le déclenchement est un signal envoyé de l'extérieur qui provoque l'acquisition des deux voies de notre mesure (position, tension).
- BDU (Binary Data Unit): circuit qui numérise les signaux analogiques issus du codeur. Le “BDU” fournit en absolu l'angle de rotation de la vis à bille sur une sortie parallèle.
- STB24: circuit qui permet la lecture au vol de la sortie parallèle du “BDU” (blocage de la valeur du codeur). Ce circuit a été réalisé par la société ADAS spécialement pour ce projet.
- ICV196 (“Input Output Binary Unit”): module VME (tout ou rien) de lecture du “STB24”.
- ICV150 (“Scan ADC”): module VME convertisseur analogique-numérique séquentiel à gain programmable.
- Echantillonneur bloqueur: module réalisé par L. Dolizy [20] qui permet une mesure simultanée des voies issues des dosimètres malgré le caractère séquentiel de l'ADC (module “ICV150”).
 1. il échantillonne au moment du déclenchement les tensions des deux dosimètres.
 2. il bloque ces valeurs et les présente à l' “ICV150” qui code les voies séquentiellement.
 3. il répartit le déclenchement sur le “STB24”.
- Carte d'axe: permet de commander les 4 moteurs pas à pas. Les deux moteurs associés aux deux profileurs d'un même banc sont reliés à la carte d'axe via une carte de puissance placée au plus proche du banc de mesure concerné. La carte d'axe transmet des informations à la carte de puissance telles que la vitesse de déplacement (fréquence) et le sens de rotation.

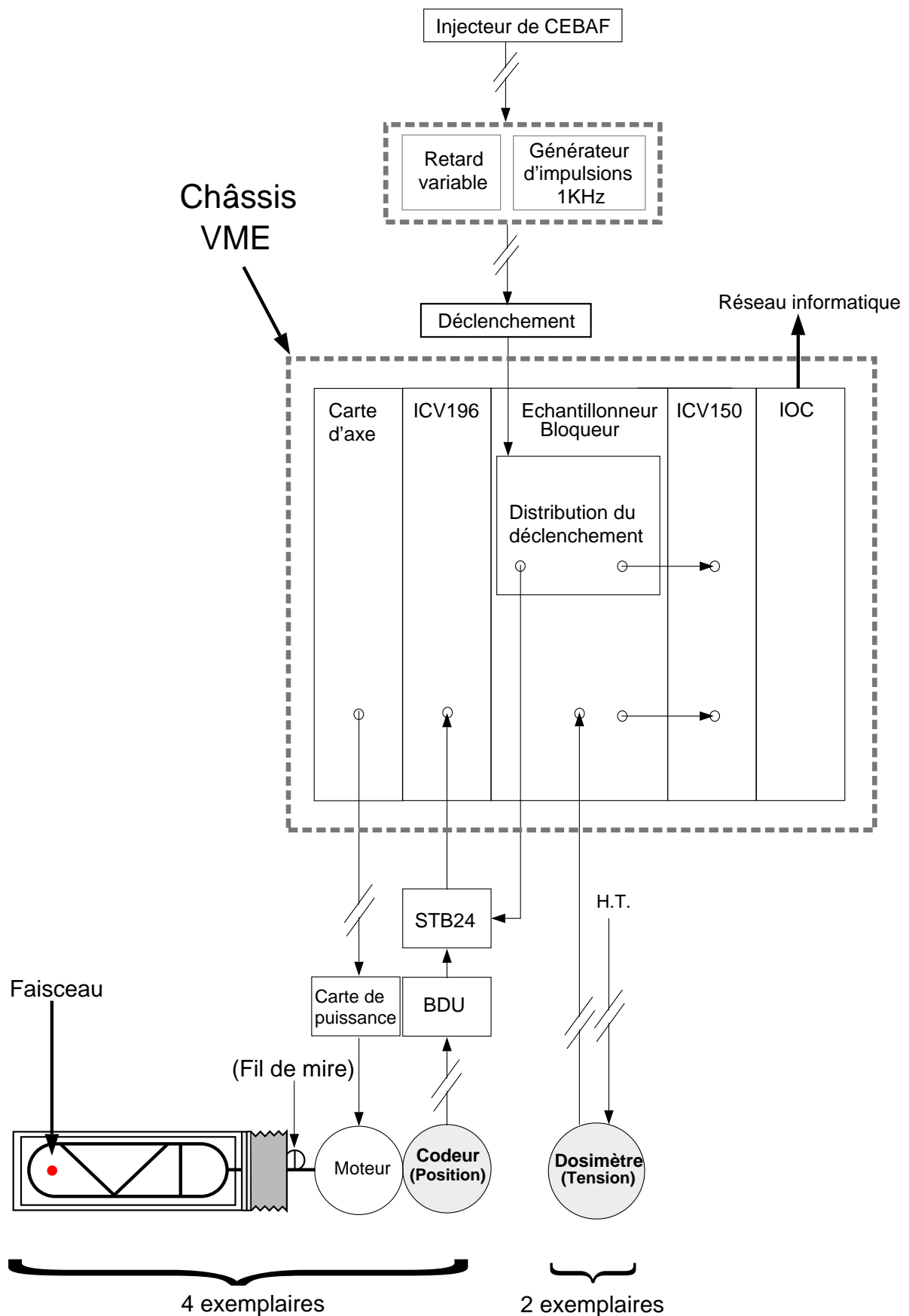


Figure 2.5 - Chaîne électronique de commande et d'acquisition des profilers.

- Contrôleur VME ou IOC (Input Output Controller) : module micro-processeur situé dans le châssis VME (Motorola MVME162).
- Haute tension des dosimètres : elle est fournie par une alimentation partagée avec d'autres appareils du hall A. Son contrôle-commande est indépendant.

La longueur inhabituelle des câbles reliant l'électronique aux appareils (80m dans le cas du banc de mesure d'amont, cf. figure [2.1]) a nécessité une étude spéciale. En effet, pour la commande des moteurs, les informations envoyées par la carte d'axe sont converties en courant pour une meilleure immunité aux bruits.

2.1.3 Le mode opératoire

Le mode opératoire des profileurs est gouverné par notre souci :

- d'éviter la fusion du fil de Tungstène⁴ lors du passage du faisceau :

l'échauffement que subit le fil est d'autant plus grand que le faisceau est intense et focalisé. Les calculs d'échauffement [19] sur lesquels nous nous appuyons supposent un diamètre de faisceau de $100\mu\text{m}$. Ces calculs sont pessimistes car, dans la réalité, le diamètre du faisceau est supérieur à cette valeur (en particulier au niveau du banc d'aval en réglage dispersif où il peut atteindre 1mm). A la suite de ces calculs, confirmés par des essais dans le hall C à Jefferson Lab., nous avons décidé de ne pas exposer le fil de Tungstène à une intensité supérieure à $25\mu\text{A}$ en mode continu.

- de mesurer l'énergie absolue du faisceau :

ceci exclut un fonctionnement en mode "pulsé"⁵ car durant les 60 premières microsecondes de l'impulsion l'énergie diminue⁶ exponentiellement jusqu'à atteindre l'énergie que l'on aurait en mode continu pour un même réglage de l'accélérateur. Du fait de cette variation d'énergie, il n'est pas possible de guider un faisceau d'intensité supérieure à $25\mu\text{A}$ en mode "pulsé". A titre d'exemple, pour une intensité de $25\mu\text{A}$ et 5 passages dans l'accélérateur, cette variation d'énergie induit une erreur de $1 \cdot 10^{-4}$ sur la mesure absolue de l'énergie. En dessous de $25\mu\text{A}$, il serait possible de corriger cet effet mais il serait difficile de contrôler cette correction avec la précision nécessaire.

- d'éviter des pertes de faisceau pouvant déclencher la sécurité différentielle⁷ protégeant le fonctionnement de l'accélérateur :

si une perte de charge ponctuelle excède 2.5nC, le faisceau est immédiatement coupé au niveau de l'injecteur.

4. Température de fusion du Tungstène : 3700K.

5. En mode pulsé, 60 impulsions de $250\mu\text{s}$ sont délivrées par seconde (60Hz). Le cycle utile est de 1.5%. Ce mode est surtout utilisé lors du réglage du faisceau.

6. Ceci est dû à la perturbation hyperfréquence induite par le faisceau dans les cavités. L'écart d'énergie est proportionnel à $N \times I$ (N : nombre de passages du faisceau dans l'accélérateur et I : intensité du faisceau).

7. Différence entre la mesure de l'intensité au niveau de l'injecteur et au niveau des trois halls expérimentaux.

- d’éviter l’augmentation excessive de la dose de radiation dans le hall A pouvant déclencher la sécurité protégeant les appareils sensibles se trouvant dans le hall.

En conséquence, pour mesurer l’énergie absolue du faisceau à des courants forts, nous fonctionnons en mode continu à intensité réduite (quelques μA). Les récents développements de l’accélérateur (“Fast Feedback”) rendent, en principe, l’énergie insensible aux variations d’intensité. Nous avons cependant conservé la possibilité d’utiliser le mode “pulsé” pour le réglage des profileurs.

En mode continu, nous adoptons une fréquence d’acquisition de 1000Hz.

En mode “pulsé”, la fréquence d’acquisition est imposée à 60Hz. Notre acquisition doit être synchronisée avec le passage du faisceau. Pour cela, on utilise un signal appelé synchronisation faisceau émis par l’injecteur. Comme cette impulsion nous arrive avant que le faisceau ne parvienne dans l’arc de déviation, il faut retarder le déclenchement de notre acquisition d’une durée dépendant du nombre N de passages du faisceau dans l’accélérateur.

Dans les deux modes considérés, pour laisser le temps au fil de se refroidir entre un aller et un retour, nous effectuons les trajets d’aller des quatre profileurs puis les quatre trajets de retour.

Selon le mode utilisé, “pulsé” ou continu, la vitesse de déplacement de l’équipage mobile est différente. A fréquence fixée, la vitesse est imposée par la valeur du pas d’acquisition qui conditionne la précision sur la position mesurée du barycentre du faisceau. On veut que l’erreur sur l’angle relatif d’amont ou d’aval induise une contribution d’au plus 10^{-5} à l’erreur sur la mesure absolue de l’énergie. La distance entre deux profileurs étant de 3708mm (banc aval) au minimum, cette erreur angulaire correspond à une erreur en position de $15\mu\text{m}$ pour chaque profileur. Par suite, le pas d’acquisition a été fixé à $15\mu\text{m}$ et la vitesse s’obtient par la relation :

$$v [\text{mm.s}^{-1}] = \text{fréquence} \times 0.015 \quad (2.1)$$

On signale que le calcul général des erreurs liées à notre méthode pour mesurer l’angle absolu de déviation du faisceau est développé à la fin de ce chapitre, paragraphe 2.3 page 178.

A titre d’exemple, le nombre de points pour décrire un pic en tension de $100\mu\text{m}$ de large est donc de 6 quel que soit le mode utilisé, “pulsé” ou continu. Les caractéristiques de l’acquisition sont données dans le tableau (2.3).

Notons cependant qu’en cas d’instabilité du faisceau en angle et en position au cours de la mesure, la précision sur la position du faisceau et par suite la précision sur l’énergie seraient dégradées. De même pour les mesures à faible courant (inférieur à $1\mu\text{A}$) ou pour un faisceau de plus grande dimension horizontale (supérieure à 1mm) pour lesquelles le rapport signal sur bruit de la tension mesurée par le dosimètre est faible. Il est donc vital pour la mesure d’énergie ARC que les efforts actuels de stabilisation en position, angle et énergie du faisceau de CEBAF atteignent leurs objectifs.

La mesure de l’angle relatif consistant à actionner les quatre profileurs puis à traiter les données acquises s’effectue à chaque mesure de l’énergie. Nous verrons dans la suite (cf.

	Mode pulsé	Mode continu
Fréquence d'acquisition	60Hz	1000Hz
Mode de déclenchement	synchronisation faisceau	générateur d'impulsions
Vitesse de déplacement du fil [mm.s^{-1}]	0.9	15.
Distance entre deux acquisitions [μm]	15	15
Durée d'accélération [s]	0.13	0.13
Durée d'un trajet aller ou retour [s]	91	6
Durée totale	12mn	48s
Nombre de points acquis/profileur	10839	10960

Tableau 2.3 - *Caractéristiques de l'acquisition. La durée d'accélération représente le temps nécessaire pour atteindre la vitesse désirée. La durée totale correspond à la durée des trajets d'aller et de retour des 4 profileurs. Le nombre de points acquis est donné pour les trajets d'aller et de retour d'un profileur. Ce nombre prend en compte le temps d'accélération.*

section 2.2) comment cette mesure de l'angle relatif s'intégrera dans la procédure générale de la mesure absolue de l'angle de déviation du faisceau.

2.1.4 Traitement des profils

A l'issue du déplacement des profileurs, les données acquises, position et tension, sont stockées dans un fichier unique. Ce fichier contient quatre séquences de même format correspondant aux quatre profileurs. Chaque séquence inclut :

- une en-tête contenant toutes les informations nécessaires à l'analyse : distance entre le fil vertical dans l'air (mire) et le fil vertical situé dans le vide, affichage du codeur en position de repos et en position de référence.
- les données du profil aller : position [pas codeur] , tension [Volts]
- les données du profil retour : position [pas codeur] , tension [Volts]

Un exemple de profil de faisceau obtenu lors du trajet aller d'un profileur est représenté sur la figure [2.6].

La détermination des angles relatifs d'amont et d'aval est obtenue en exploitant le fichier précédemment décrit rassemblant les données acquises. Cette exploitation est réalisée par un programme écrit en fortran 77 et exécuté sur une station de travail UNIX du laboratoire. Les grandes étapes sont :

1. correction des défauts éventuels de l'acquisition,
2. détermination grossière des zones de recherche des pics,
3. évaluation du niveau continu parasite en dehors des zones de recherche des pics (zones de bruit),
4. première soustraction du niveau continu,
5. détermination de la largeur à la base des pics,

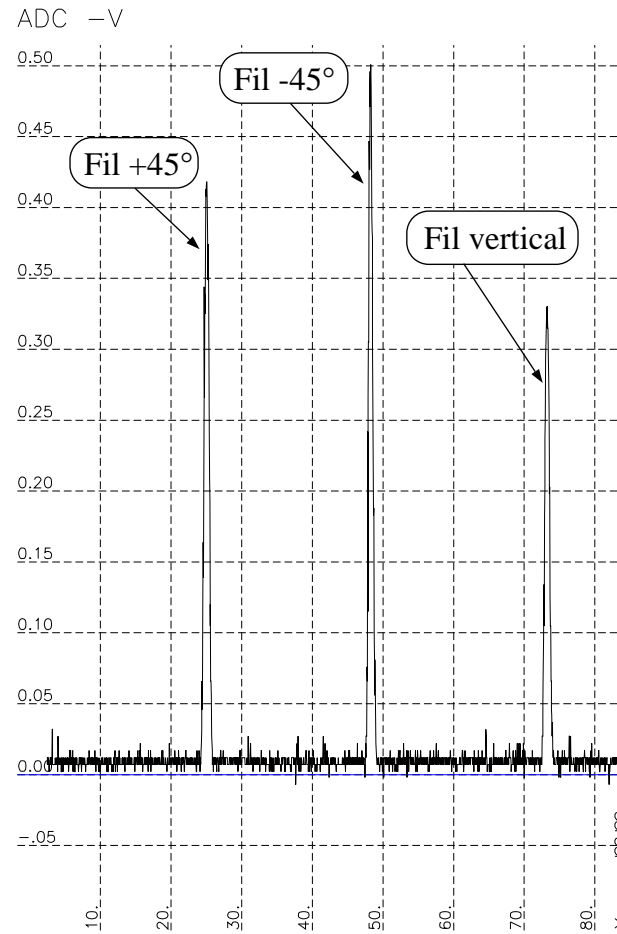


Figure 2.6 - Profil de faisceau issu du profileur d'amont du banc de mesure situé en aval de l'arc. Conditions : réglage du faisceau achromatique, mode "pulsé", vitesse : 2.5mm.s^{-1} , intensité du faisceau $1\mu\text{A}$, gain 1. En abscisse, les pas du codeur ont été convertis en mm. Seul le trajet d'aller est représenté. La largeur totale à mi-hauteur du pic correspondant au fil vertical est de 0.8mm et son barycentre est à 0.994mm au-delà de la position de référence du profileur.

6. détermination fine des zones de recherche des pics,
7. nouvelle évaluation du niveau continu de part et d'autre de l'intervalle étroit de recherche des pics,
8. seconde soustraction du niveau continu et calcul du barycentre du pic correspondant au fil vertical de mesure,
9. calcul de la distance (barycentre du faisceau - position de référence),
10. calcul des angles relatifs d'amont (θ_i) et d'aval (θ_f).

2.1.4.1 Correction des défauts éventuels de l'acquisition

Pour mettre en évidence ces défauts, on trace le graphe (N° de déclenchement, incrément du codeur) associé à chaque déplacement d'un profileur, cf. figure [2.7].

A partir de ces graphes, nous avons observé deux types de défauts liés à l'acquisition :

- un déclenchement est manifestement manquant dans les données acquises. On le détecte par un doublement apparent de la vitesse entre deux déclenchements qui encadrent celui qui manque, cf. figure [2.7]. On le corrige en rétablissant la donnée manquante, position et tension, par interpolation linéaire entre les deux données voisines. Ce défaut a été observé avec une probabilité d'environ $2 \cdot 10^{-4}$ par déclenchement.
- un "bit" est erroné dans le mot provenant du codeur. Ce défaut n'est visible que s'il s'agit d'un "bit" de poids élevé (2^n , $n > 2$). On identifie le "bit" fautif d'après l'amplitude du défaut de vitesse, cf. figure [2.7] et on le corrige. La tension pour ce déclenchement n'est pas affectée. La probabilité de ce défaut est d'environ 10^{-5} .

2.1.4.2 Première détermination des zones de recherche des pics

Nous faisons l'hypothèse que le faisceau est inclus dans un diamètre de 16mm autour de l'axe du tube faisceau. Compte tenu de la géométrie du profileur et de la distance entre chaque fil, on déduit les bornes de la première zone de recherche dans laquelle doit se trouver le pic en tension correspondant au passage du faisceau.

2.1.4.3 Première évaluation du niveau continu

De part et d'autre de la zone de recherche des pics, il existe deux plages de 5mm où nous sommes sûrs qu'aucun signal n'est présent compte tenu de l'hypothèse précédente. Ces plages nous servent à mesurer le niveau continu parasite qui s'ajoute éventuellement au signal délivré par le dosimètre.

2.1.4.4 Première soustraction du niveau continu

Nous soustrayons la partie continue et linéairement variable du signal qui est mesuré dans les zones de bruit :

$$V_i^{corrigé} = V_i^{initial} - (b_0 + b_1 X_i) \quad (2.2)$$

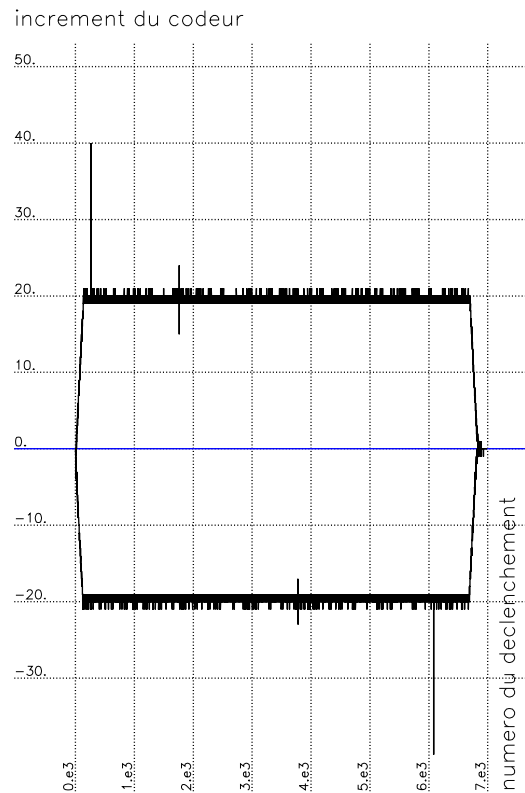


Figure 2.7 - Graphe (N° de déclenchement, incrément du codeur) : profil de vitesse. La courbe supérieure correspond au trajet d'aller et la courbe inférieure au trajet de retour. Chacun de ces trajets présente deux types de défauts : un déclenchement manquant et un "bit" erroné. Le déclenchement manquant se caractérise par une vitesse apparente double entre deux déclenchements (sur la courbe supérieure : premier défaut dans le sens de lecture). Le défaut du "bit" erroné (deuxième défaut sur la courbe supérieure) se caractérise par un écart apparent de vitesse suivi de l'écart opposé lors du déclenchement suivant. L'amplitude de l'écart correspond à une puissance entière de 2. (Ici 2^2). On constate les deux mêmes types de défauts sur la courbe inférieure.

V_i : tension mesurée au $i^{\text{ème}}$ déclenchement,

X_i : position de l'équipage mobile donnée par le codeur au $i^{\text{ème}}$ déclenchement,

b_0 et b_1 : coefficients calculés de sorte que la moyenne de $V_i^{\text{corrigé}}$ sur chacune des zones de bruit soit nulle.

2.1.4.5 Détermination de la largeur de la base du pic

La présence éventuelle de bruit, aléatoire ou périodique de haute fréquence, ainsi que les instabilités spatiales du faisceau rendent cette détermination délicate. Nous procédons de la manière suivante :

- nous améliorons artificiellement le rapport signal sur bruit par un lissage itératif jusqu'à ce que le maximum de tension V_{max} (identifié comme le signal) soit 10 fois supérieur au premier maximum relatif (identifié comme le bruit). L'algorithme de lissage adopté consiste à remplacer V_i par :

$$V_i' = \frac{1}{4} V_{i-1} + \frac{1}{2} V_i + \frac{1}{4} V_{i+1} \quad (2.3)$$

Ce traitement porte sur la première zone de recherche des pics.

- la “base” du pic est déterminée comme la région du spectre où la tension est supérieure à 10% de V_{max} .

2.1.4.6 Calcul du barycentre du faisceau

La zone de recherche étroite est centrée sur la “base” du pic déterminée précédemment et sa largeur est de 40% supérieure à celle de la “base”. On note qu'une fois la zone de recherche étroite fixée, la position du barycentre du faisceau est déterminée à partir du spectre réel et non du spectre lissé. Les nouvelles zones de bruit sont choisies de même largeur que la zone de recherche étroite et adjacentes de part et d'autre de celle-ci, cf. figure [2.8].

La position du barycentre du faisceau est calculée par intégration selon la méthode des trapèzes pour des pas de largeur variable :

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i V_i \Delta X_i}{\sum_i V_i \Delta X_i} \quad (2.4)$$

avec :

X_i : position de l'équipage mobile donnée par le codeur au $i^{\text{ème}}$ déclenchement.

V_i : tension détectée par le dosimètre au $i^{\text{ème}}$ déclenchement.

$$\Delta X_i = \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{2}$$

L'indice i court sur les déclenchements de la zone de recherche étroite du pic associé au fil vertical.

La position du barycentre du faisceau que l'on retient est la moyenne des positions du barycentre obtenues à l'aller et au retour de l'équipage mobile. Lorsque la position du barycentre du faisceau varie de plus de $15\mu\text{m}$ entre l'aller et le retour, la série de mesures correspondante est rejetée car elle ne permet pas d'obtenir une précision suffisante sur l'énergie.

2.1.4.7 Calcul de la distance (position de référence - barycentre du faisceau)

Pour ce calcul, on utilise la distance horizontale mesurée entre le fil de mire et le fil vertical de mesure. Cette distance mesurée avec précision est spécifique pour chaque couple (porte-cartouche, cartouche). Elle figure dans un fichier de données associé à chaque profileur.

2.1.4.8 Résultat pour l'angle relatif

A l'heure actuelle, les profils dont nous disposons restent des essais préliminaires effectués pour la plupart en parasite d'une expérience. En particulier, il nous manque des profils relatifs à un faisceau continu réglé en mode dispersif. Les profils présentés sur la figure [2.8] correspondent à un faisceau pulsé d'intensité $1\mu\text{A}$ réglé en mode achromatique. Les résultats issus de ces profils figurent dans le tableau (2.4).

	Profileur 1	Profileur 2	Profileur 3	Profileur 4
Distance faisceau réel/nominal [μm]	+814.7	+1554.2	+1362.6	-2595.1
Distance entre profileurs [mm]	3971		3710	
Angles relatifs [$^{\circ}$]	$\theta_i = -1.0669 \cdot 10^{-2}$		$\theta_f = -6.1121 \cdot 10^{-2}$	
Angle relatif total [$^{\circ}$]	$\theta_{\text{relatif}} = \theta_i + \theta_f = -7.1789 \cdot 10^{-2}$			

Tableau 2.4 - Résultats obtenus à partir des profils présentés sur la figure [2.8].

La figure [2.9] présente trois profils relatifs à un faisceau très mal stabilisé.

Compte tenu de l'instabilité du faisceau constatée lors des profils que nous avons effectués jusqu'à présent, les angles relatifs ne permettent pas d'obtenir une précision de 10^{-4} sur la mesure d'énergie. C'est pourquoi, les efforts actuels ("Fast Feedback") de stabilisation du faisceau (position, angle, variation d'énergie lors d'un changement d'intensité), menés à Jefferson Lab., sont essentiels pour atteindre la précision escomptée sur la mesure absolue de l'énergie du faisceau par la méthode développée ici.

Du fait de l'emploi de profileurs à fils, notre méthode actuelle est destructive et exclut la mesure de l'énergie du faisceau durant l'acquisition d'une expérience. Dans le futur, il est prévu de rendre notre méthode non-destructive en ajoutant aux extrémités de chacun des bancs de mesure un moniteur de position (BPM : "Beam Position Monitor"). Développé à Jefferson Lab. pour l'accélérateur, ce moniteur de position électromagnétique est capable de mesurer avec une précision suffisante les variations de position du centre de gravité du faisceau sans le perturber. Par contre, un BPM ne permet pas de mesurer la position absolue du centre de gravité du faisceau avec précision car son zéro est mal connu. Dans ces conditions, notre idée est de calibrer les zéros des BPM à l'aide de nos profileurs,

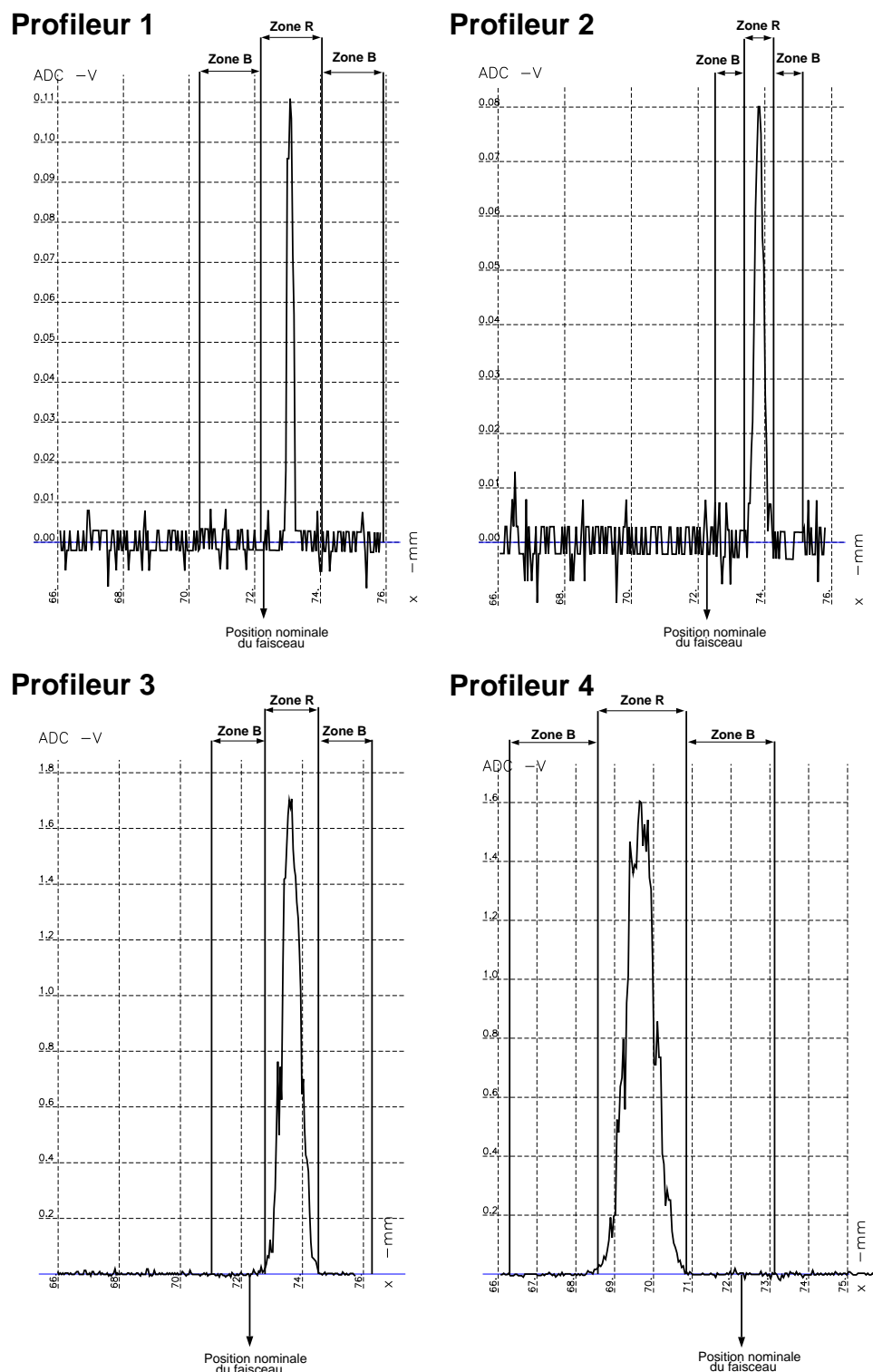


Figure 2.8 - Pics mesurés avec le fil vertical de mesure de chacun des quatre profileurs (seul le trajet retour est représenté). Les profileurs 1 et 2 sont situés sur le banc de mesure d'amont et les profileurs 3,4 sur le banc de mesure d'aval. Ces quatre profils se réfèrent à un faisceau pulsé réglé en achromatique d'intensité $1\mu A$. La vitesse de déplacement de l'équipage mobile est de 2.5mm/s . Exceptionnellement, tous les signaux sont issus du dosimètre d'aval, ce qui explique le faible niveau du signal des profileurs 1 et 2. La zone notée R correspond à la zone de recherche étroite du pic en référence à notre méthode d'analyse des profils. Les zones notées B, situées de part et d'autre de la zone R, sont les zones dites de bruit.

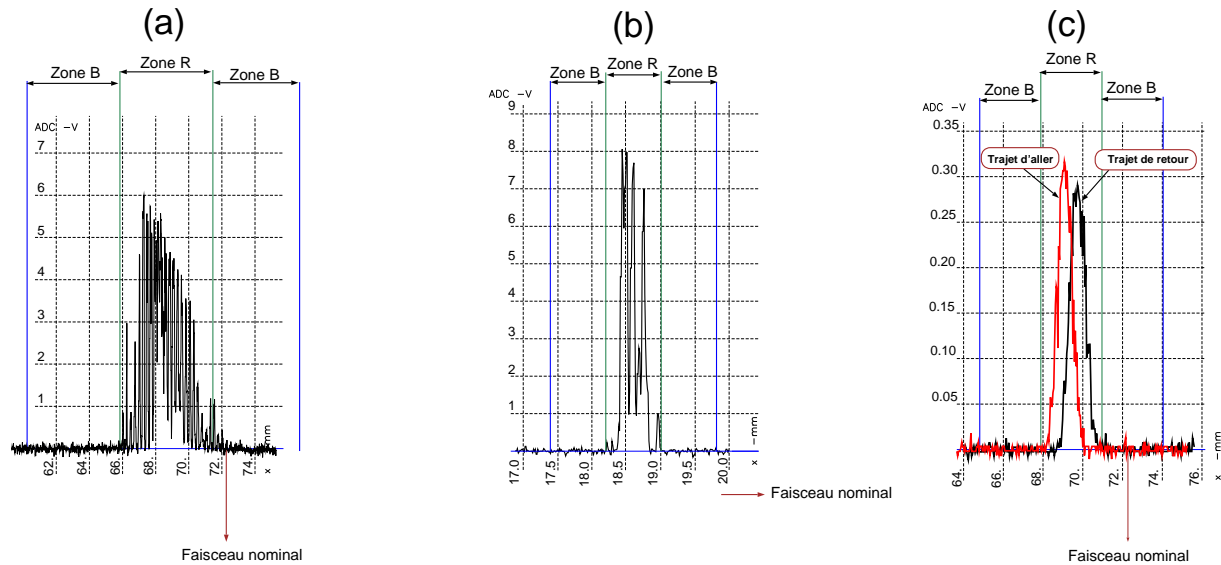


Figure 2.9 - (a) : exemple de profil relatif à un faisceau continu réglé en mode dispersif (profileur 4, fil de mesure vertical, $I=10\mu A$, $v=12.5\text{mm/s}$, gain 64, retour seul, barycentre : 68.50mm). (b) : présence de plusieurs pics dans la zone de recherche (profileur 4, fil 1 à 45° , faisceau continu réglé en mode achromatique, $I=1\mu A$, $v=12.5\text{mm/s}$, gain 128, aller seul, barycentre : 68.96mm). Les profils (a) et (b) s'obtiennent en mesurant le courant d'émission secondaire induit lorsque le faisceau intercepte le fil [21]. (c) : illustration de l'instabilité du faisceau entre le trajet d'aller et le trajet de retour (profileur 4, fil de mesure vertical, faisceau pulsé réglé en mode achromatique, $I=1\mu A$, $v=2.5\text{mm/s}$, barycentre du pic à l'aller : 69.75mm, barycentre du pic au retour : 69.11mm). Le signal est mesuré par le dosimètre.

quotidiennement par exemple, et de baser le calcul des angles relatifs sur la différence de position affichée par les quatre BPM.

2.2 Mesure de l'angle de référence

Nous rappelons que l'angle de référence que nous voulons mesurer est défini comme l'angle formé entre la direction de référence en amont et en aval de l'arc. Chacune de ces directions de référence est celle du segment reliant les mires des deux profileurs concernés lorsque leur équipement mobile est en position de référence, cf. paragraphe 2.1.2.3 page 153. Ces deux directions de référence font le lien entre l'angle relatif discuté précédemment et l'angle de référence. L'angle de référence à mesurer est illustré sur la figure [2.10].

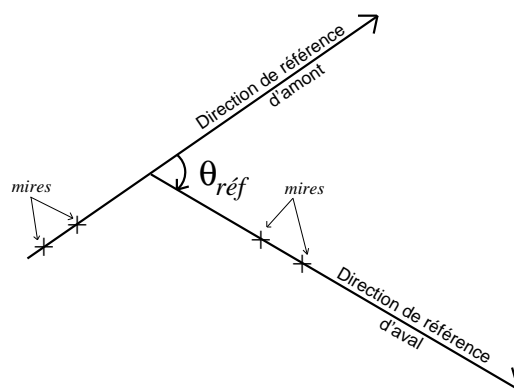


Figure 2.10 - Définition de l'angle de référence. Chacune des quatre mires est solidaire de l'équipage mobile d'un profileur situé en position de référence.

2.2.1 Principe de la mesure

Après avoir envisagé plusieurs méthodes pour mesurer l'angle de référence, nous adoptons une méthode optique basée sur des visées. En optique, l'instrument idéal pour effectuer des mesures angulaires de précision est le théodolite équipé d'un système d'autocollimation⁸. La description de cet instrument ainsi que le principe des différentes visées utilisées sont reportés dans l'annexe I. Nous avons adopté le théodolite d'une part pour déterminer, par visée directe des mires, les directions de référence en amont et en aval de l'arc et d'autre part pour relier par autocollimation ces directions de référence entre elles. Nous rappelons que seuls les angles dans le plan horizontal nous intéressent. De plus, toutes les visées s'effectueront avec retournement, cf. annexe I page 294 pour réduire les erreurs systématiques.

En outre, dans le but de nous prémunir contre l'effet d'éventuels mouvements du sol sur l'angle de référence, nous voulons avoir la possibilité de le mesurer périodiquement.

8. L'autocollimation permet de déterminer très précisément la direction perpendiculaire au plan d'un miroir. Lors des visées d'autocollimation, le théodolite émet une croix lumineuse que le miroir lui renvoie.

La périodicité de cette mesure dépend de la fréquence des accès dans le hall expérimental.

Du fait de l'exigüité⁹ du tunnel et des problèmes d'accès dans la région située en amont du mur de protection (cf. figure [2.1(b)]), nous avons adopté une méthode utilisant deux paires de miroirs plans : une de déviation et une d'autocollimation. Cette méthode, illustrée sur la figure [2.11], consiste à effectuer une même séquence de visées au niveau des deux bancs de mesure situés en amont et en aval de l'arc :

- visée par autocollimation sur le miroir B1 à partir du point A où est placé le théodolite (resp. B2 à partir du point D). On notera que lors de la visée par autocollimation sur le miroir B2 à partir du théodolite placé en D, le rayon lumineux est dévié par la paire de miroirs centrale d'un angle 2γ à l'aller comme au retour et ce quelle que soit l'orientation exacte autour de la verticale de l'ensemble des miroirs C1 et C2, cf. figure [2.11].
- visées des deux fils de mire, a1 et a2 (resp. d1 et d2), solidaires de l'équipage mobile des profileurs situés de part et d'autre d'un banc de mesure. Pour la visée, on rappelle que les équipages mobiles des deux profileurs sont en position de référence.

Nous devons garantir l'horizontalité des deux visées d'autocollimation. Cette condition est réalisée si les directions normales aux quatre miroirs sont horizontales. Pour cela, chaque paire de miroirs est munie de deux niveaux à bulle d'une sensibilité de $\pm 1\text{mrad}$ qui contrôlent les deux angles de nivellement. Ces niveaux à bulle sont réglés de sorte qu'ils indiquent simultanément l'horizontale lorsque les normales de chacun des deux miroirs d'une paire sont dans le plan horizontal. Ce réglage a été effectué à l'aide de deux théodolites par autocollimation simultanée sur chacun des deux miroirs d'une paire.

Pour fixer les idées, on a reporté dans le tableau (2.5) les valeurs nominales des angles β et γ , c'est-à-dire les valeurs spécifiées pour l'usinage des pièces portant les miroirs.

Angle	Valeur nominale ($^{\circ}$)
β	7.51
γ	10.35

Tableau 2.5 - *Valeurs nominales des angles.*

Les deux miroirs de chaque paire sont liés entre eux par une pièce en alliage d'aluminium taillée dans la masse. Une fois fixée sur son support, la paire de miroirs d'autocollimation est orientable de quelques dixièmes de degrés pour autoriser le réglage de l'optique. Nous avons conçu¹⁰ la mécanique des paires de miroirs de telle sorte qu'elle se fixe sur des supports identiques à celui du théodolite. Pour fixer les idées, l'objet constitué par chaque paire de miroirs est contenu dans un cylindre d'axe vertical d'un diamètre de 20cm environ.

Nous utilisons quatre miroirs identiques dont les caractéristiques figurent dans le tableau (2.6).

9. Le point d'intersection des directions de référence d'amont et d'aval est situé dans le mur.

10. Services SGPI et SPhN du DAPNIA.

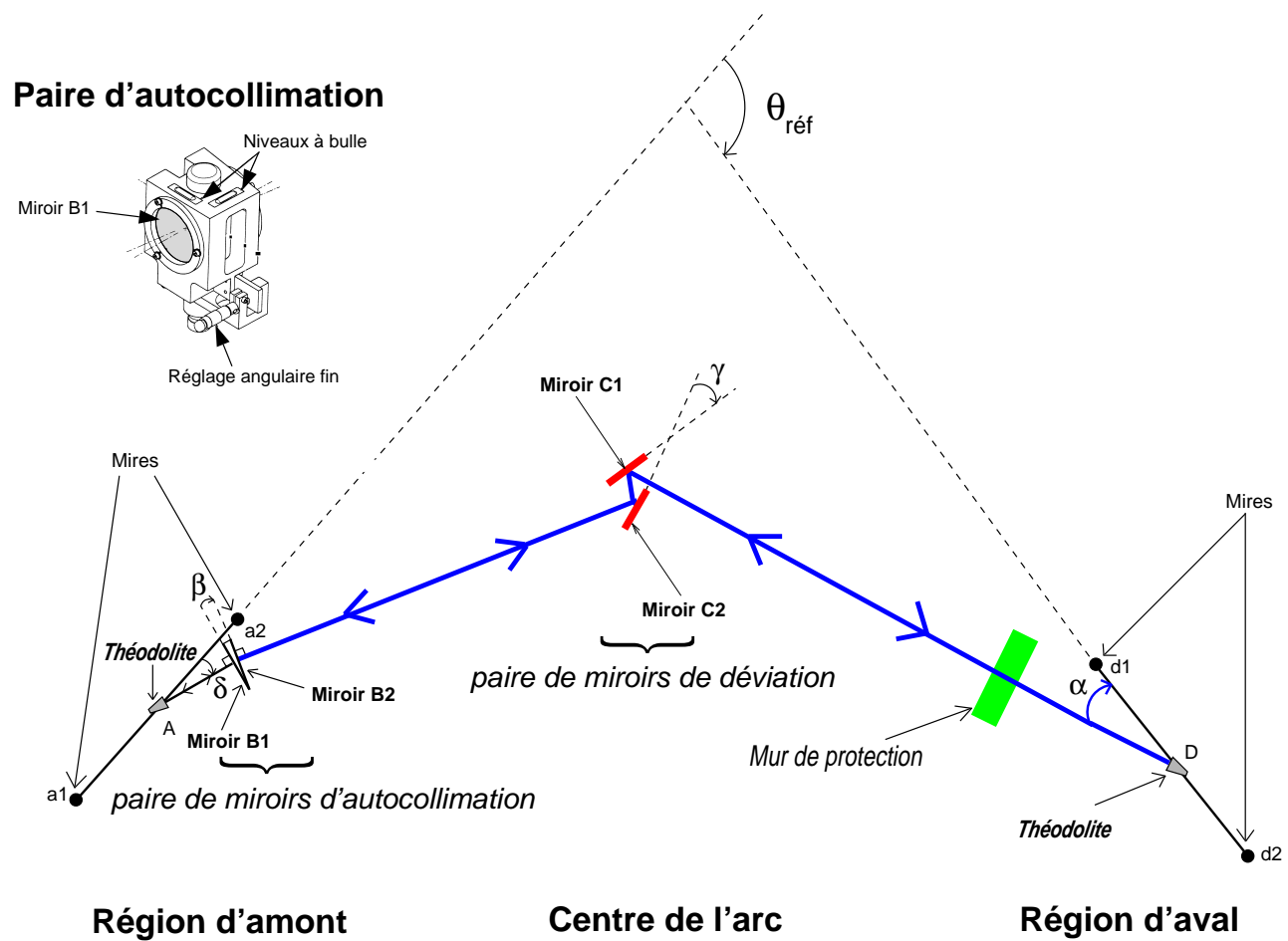


Figure 2.11 - Principe de la mesure de l'angle de référence. Dans la disposition réelle, l'angle δ est petit, idéalement nul. Sur ce dessin, tous les angles sont positifs.

Diamètre :	80mm
Epaisseur :	10mm
Planéité :	$\lambda/10$
Matériau :	verre aluminisé

Tableau 2.6 - Caractéristiques des miroirs. La réflexion a lieu sur la face libre du métal, le support en verre n'est pas traversé par nos visées.

Etablissons maintenant la relation qui lie l'angle de référence aux angles δ , β , γ et α de la figure [2.11].

Dans un premier temps, nous supposons que l'axe du théodolite, placé successivement au point A puis au point D, est rigoureusement situé dans le plan vertical contenant les mires. Nous verrons plus loin que la procédure de visée que nous avons adoptée tient compte de l'éventuel décalage transverse entre le centre du théodolite et ce plan.

En s'appuyant sur la figure [2.11], on vérifie que l'angle de référence s'écrit :

$$\boxed{\theta_{réf} = \delta + (\beta + 2\gamma) + \alpha} \quad (2.5)$$

Les angles δ et α sont mesurés directement *in situ*. La mesure précise de l'angle $(\beta + 2\gamma)$, appelée calibration des paires de miroirs, est détaillée au paragraphe 2.2.1.2.

Nous commencerons par détailler la procédure de visées que nous avons adoptée pour déterminer α et δ : visées directes des mires et autocollimation. Ensuite, nous expliquerons comment sont calibrées les deux paires de miroirs.

2.2.1.1 Visées directes des mires et visées par autocollimation

Notre but est de déterminer l'angle δ (resp. α) entre la direction de référence d'amont (resp. d'aval) et la direction de visée d'autocollimation sur le miroir B1 (resp. B2). Nous rappelons que toutes les visées sont effectuées avec retournement (cf. annexe I) pour réduire les erreurs instrumentales.

Par construction, le théodolite est placé dans le plan vertical passant par les deux mires appartenant aux deux profileurs de chaque banc de mesure. En pratique, cette condition n'est pas réalisée exactement et donc nous supposons dorénavant que le théodolite est écarté d'une distance d de ce plan vertical comme illustré sur les deux dessins du haut de la figure [2.12] (vues de dessus) et sur la figure [2.13] que nous allons détailler. Les vues de profil représentées en bas de la figure [2.12] donnent une vue d'ensemble des conditions dans lesquelles sont effectuées les différentes visées en amont et en aval de l'arc.

Notre méthode consiste à effectuer la même séquence de visées en amont et en aval de l'arc en adoptant chaque fois une origine arbitraire pour les angles horizontaux. En nous appuyant sur la figure [2.13(a)], cette séquence est :

- installation du théodolite en A (resp. en D)
- visée en autocollimation sur le miroir B1 (resp. B2), notée V1
- visée du fil de mire d'aval a2 (resp. d2), notée V2
- visée du fil de mire d'amont a1 (resp. d1), notée V3

On signale que nous avons optimisé l'éclairage des fils de mire afin d'obtenir la meilleure précision : le fil de mire apparaît par absorption de la lumière (lampe halogène) sur un fond blanc uniforme.

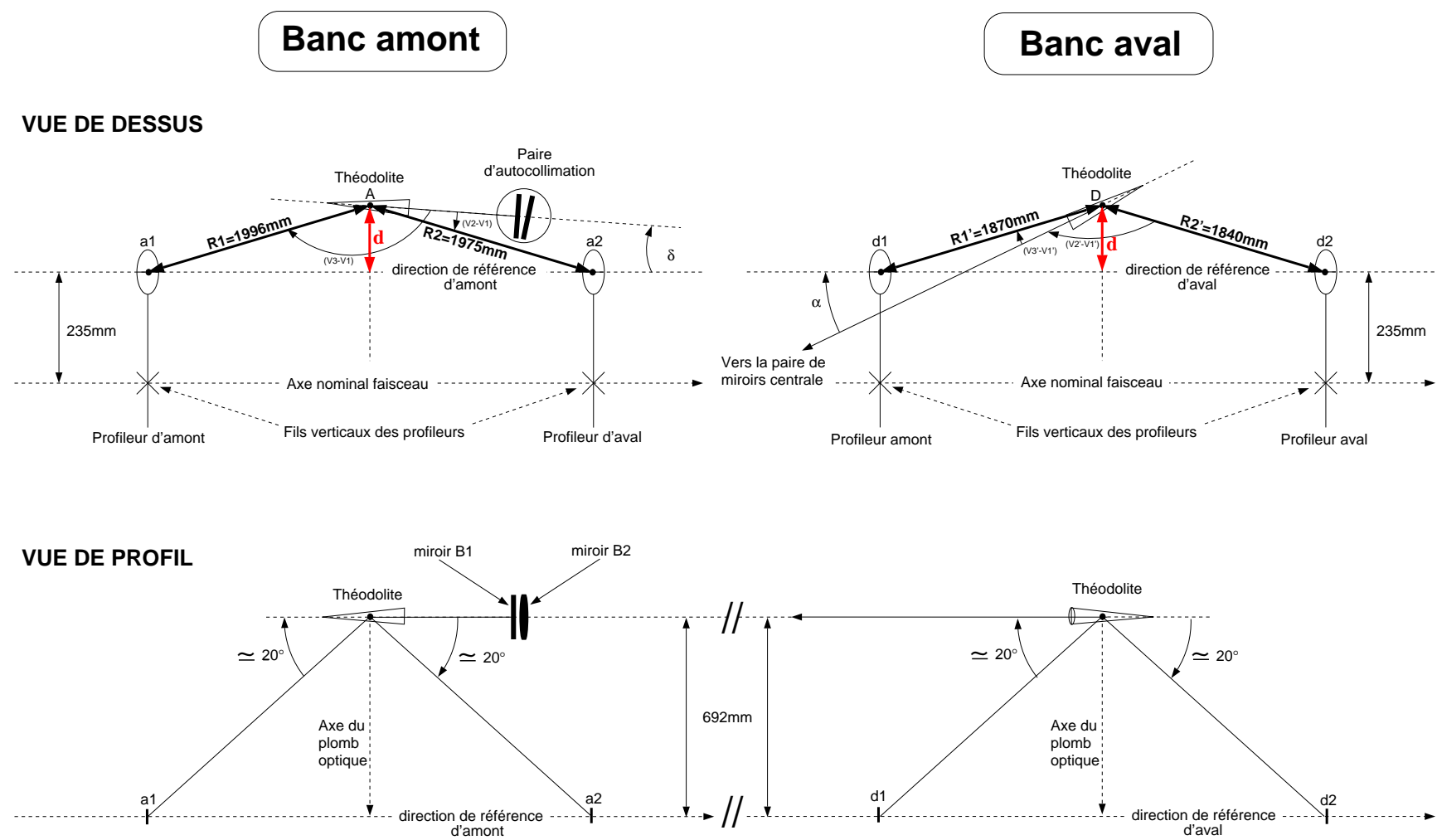


Figure 2.12 - Vues de dessus et de profil des conditions de visées : visées directes des mires a_1 , a_2 , d_1 , d_2 et visées d'autocollimation sur les miroirs B1 et B2 appartenant à la paire d'autocollimation située sur le banc d'amont. Sur les vues de dessus, la distance de 235mm qui sépare l'axe nominal faisceau et le segment formé par les deux mires correspond à la distance entre le fil de mire vertical et le fil vertical de mesure. Le décalage d du théodolite par rapport au segment reliant les deux mires a été volontairement exagéré. Pratiquement, ce décalage est réglé à une valeur inférieure à 2mm. Les angles V_1 , V_2 , V_3 , V_1' , V_2' et V_3' sont définis sur la figure [2.13]. Les distances R_1 , R_2 , R_1' et R_2' sont mesurées à l'aide du plomb optique du théodolite, cf. note de bas de page (page 172). Sur ce dessin, tous les angles sont positifs.

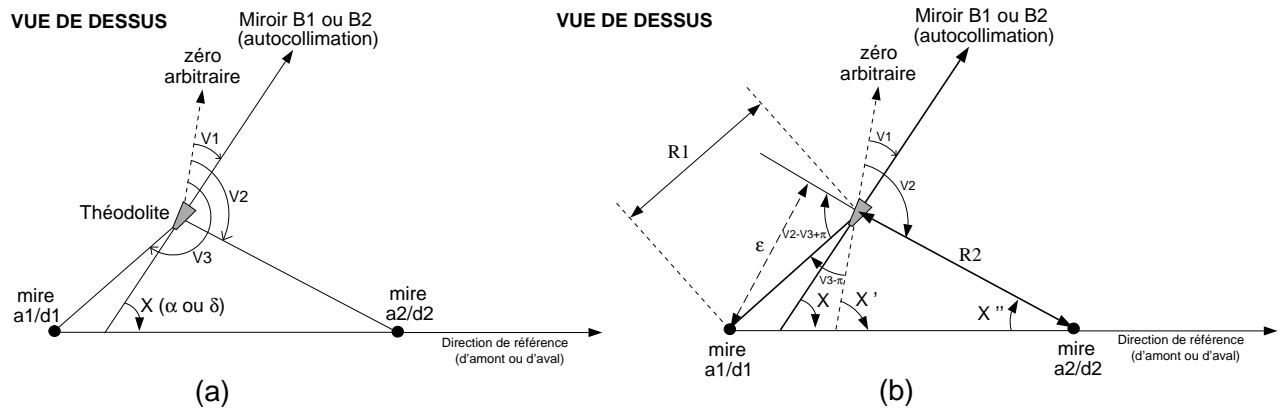


Figure 2.13 - Dans la réalité, $R1 \simeq R2$ et le théodolite se trouve très proche ($< 2\text{mm}$) du segment reliant les deux mires. La figure (a) illustre les trois visées ($V1$, $V2$, $V3$) que nous effectuons successivement en amont et en aval de l'arc. La figure (b) aide à déterminer l'angle X qui nous intéresse à partir des visées $V1$, $V2$, $V3$ et des distances $R1$, $R2$. Sur ce dessin, tous les angles sont positifs.

En plus des visées $V1$, $V2$ et $V3$, l'angle X (δ ou α) que l'on recherche nécessite la mesure des distances $R1$ et $R2$ entre le théodolite et chacune des mires [2.13(b)]. Cette mesure s'effectue à l'aide du plomb optique¹¹ du théodolite et d'un mètre à ruban. La précision d'un mètre à ruban est suffisante du fait de la petitesse du décalage éventuel du théodolite comparativement à la longueur $R1$ ($\simeq 2\text{m}$). A titre d'exemple, une erreur de 1cm sur $R1$ ou $R2$ conduirait à une erreur de $5 \cdot 10^{-6}$ radians sur l'angle X cherché.

Connaissant $V1$, $V2$, $V3$, $R1$ et $R2$, on résout d'abord le triangle formé par la mire d'amont, la mire d'aval et le théodolite. A partir de la figure [2.13(b)], on obtient :

$$\varepsilon = R1 \sin(V2 - V3 + \pi) \quad (2.6)$$

$$X'' = \arctan \left(\frac{\varepsilon}{R1 \cos(V2 - V3 + \pi) + R2} \right) \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

Par suite, l'angle X' entre l'origine arbitraire et le segment reliant les deux mires s'écrit :

$$X' = V2 - X'' \quad (2.9)$$

et finalement on déduit l'angle X recherché correspondant à l'angle formé entre la visée d'autocollimation et le segment reliant les deux mires :

$$\boxed{X(\delta \text{ ou } \alpha) = X' - V1} \quad (2.10)$$

11. Plomb optique : lunette auxiliaire qui permet de viser vers le bas à la verticale du théodolite.

On trouve :

δ	0.033282°
α	6.136882°

Tableau 2.7 - Mesures effectuées en février 1997. Ces résultats correspondent à la moyenne de plusieurs mesures au niveau des bancs de mesure en amont et en aval de l'arc.

La discussion associée aux erreurs sur ces deux mesures d'angle est reportée à la fin de ce chapitre page 179.

2.2.1.2 Calibration des paires de miroirs

On désigne par calibration la mesure de l'angle de déviation $\Omega (= \beta + 2\gamma)$ produit par l'effet cumulé des deux paires de miroirs : paire d'autocollimation et paire de déviation, cf. figure [2.11]. Cet angle figure dans la relation (2.5).

Cette calibration nécessite l'emploi de deux théodolites. On place les deux paires de miroirs ainsi que les deux théodolites sur un même plan horizontal à faible distance relative (table optique), cf. figure [2.14], en utilisant des supports spéciaux de petite taille. Pour fixer les idées, les deux théodolites sont distants d'environ 2m et la distance de la paire de miroirs de déviation à l'axe formé par les deux théodolites est de l'ordre de 60cm.

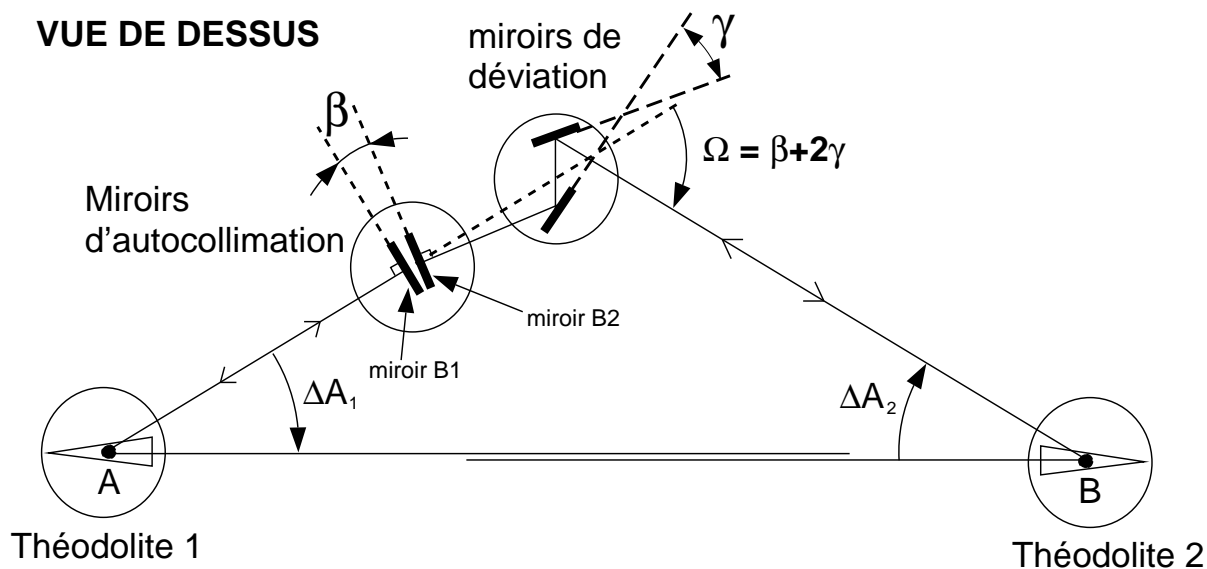


Figure 2.14 - Description de la méthode pour la calibration de l'angle produit par l'effet cumulé des deux paires de miroirs. Sur cette figure, la valeur réelle des angles entre les deux miroirs constituant une paire n'est pas respectée ($\beta = 7.5^\circ$, $2\gamma = 20.7^\circ$). De plus, sur ce dessin, les angles sont positifs.

La procédure consiste en deux mesures d'autocollimation et deux mesures de “collimation croisée”¹² :

- Mesures d'autocollimation : le théodolite 1 (resp. 2) vise le miroir B1 (resp. B2), on initialise à zéro le codeur angulaire correspondant à l'angle dans le plan horizontal du théodolite 1 (resp. 2).
- Mesures de “collimation croisée” : les deux théodolites sont orientés face à face. Le théodolite 1 joue le rôle de récepteur et vise le théodolite 2 qui joue alors le rôle d'émetteur. On note les valeurs des angles dans le plan horizontal affichées par les deux théodolites. L'angle horizontal lu sur le théodolite 1 correspond au ΔA_1 de la figure [2.14] et l'angle lu sur le théodolite 2 au ΔA_2 de cette même figure.
- Afin d'obtenir une meilleure précision sur ΔA_1 et ΔA_2 , on inverse les rôles des deux théodolites. On répète l'étape précédente et on retient pour ces deux angles la moyenne des deux mesures : $\overline{\Delta A_1}$ et $\overline{\Delta A_2}$. Nous qualifierons cette procédure de “collimation croisée double”.
- Connaissant $\overline{\Delta A_1}$ et $\overline{\Delta A_2}$, on a :

$$\Omega = \beta + 2\gamma = \overline{\Delta A_1} + \overline{\Delta A_2} \quad (2.11)$$

Résultat :

Après avoir répété deux fois le mode opératoire précédent en janvier 97, le résultat moyen que l'on adopte est :

$$\boxed{(\beta + 2\gamma)_{mesuré} = 28.1581^\circ = 28^\circ 9' 29''} \quad (2.12)$$

L'écart entre les deux mesures était inférieur à 2" d'arc. Cette mesure devra être refaite à titre de contrôle. La valeur mesurée de $(\beta + 2\gamma)$ est à comparer à la valeur nominale de $28^\circ 11' 46''$ correspondant au cahier des charges.

2.2.2 Problème lié à l'autocollimation à grande distance

Au delà d'une dizaine de mètres, la précision des mesures par autocollimation se trouve affectée par les turbulences et l'hétérogénéité en température de l'air. La visée d'autocollimation sur le miroir B1 (figure [2.11]), en amont de l'arc, ne pose pas de problème car la distance (théodolite, miroir B1) est inférieure à 1m. Dans le cas de l'autocollimation sur le miroir B2, par contre, cette distance atteint 46m (théodolite, miroir B2) pour le seul trajet d'aller. En astronomie où les mesures d'angle jouent un rôle important, les erreurs citées dans la littérature vont jusqu'à quelques dizaines de seconde d'arc¹³ pour une traversée complète de l'atmosphère. En ce qui nous concerne, nous nous attendons à des erreurs inférieures qui méritent cependant d'être contrôlées.

12. Deux théodolites se font face, l'un (l'émetteur) émet sa croix lumineuse en direction du second (le récepteur) qui la vise, cf. annexe I page 294.

13. 1 seconde d'arc $\simeq 5\mu\text{rad} \simeq 3 \cdot 10^{-4}$ degrés.

Nous nous fixons l'objectif de 2 secondes d'arc de précision sur la mesure de l'angle α obtenue par autocollimation sur le miroir B2 à partir du point D. Ceci contribue à une erreur de $1.6 \cdot 10^{-5}$ sur l'énergie mesurée.

Une manière classique de réduire les turbulences de l'air est de protéger la ligne de visée par un tube. Nous avons testé cette méthode dans le tunnel de l'Accélérateur Linéaire de Saclay (ALS) en visant un fil tendu sur une longueur de 50m à l'intérieur d'un tube en PVC. Trois points ont été visés : un à chaque extrémité du fil et un au milieu. La position du théodolite a été ajustée latéralement pour coïncider avec le plan vertical contenant les deux points de visées extrêmes. La visée centrale s'est avérée contenue dans ce même plan avec une précision de 2 seconde d'arc. Lors d'un second test nous avons installé un miroir à l'extrémité du tube et avons observé en autocollimation une reproductibilité de 2 secondes d'arc sur l'angle dans le plan horizontal pour quatre opérateurs différents. Nous avons également chauffé ponctuellement un côté du tube à l'aide d'une chaufferette. La composante horizontale de l'angle obtenue par autocollimation n'a pas été affectée de manière mesurable. La composante verticale par contre est devenue instable.

Suite aux tests que nous avons effectués avec le tube protecteur, nous avons transposé cette technique dans le tunnel de CEBAF entre le point D et le miroir B2. Pour réduire la stratification thermique de l'air, nous avons choisi un tube en alliage d'aluminium (\varnothing 150mm), donc bon conducteur thermique, recouvert d'une enveloppe isolante et réfléchissant la lumière. La figure [2.15] représente une section du tunnel équipée du tube de visée. Les deux paires de miroirs, de déviation et d'autocollimation, ont reçu une protection du même type en forme de boîte cylindrique.

L'air (éventuellement radioactif) du bâtiment accélérateur de CEBAF est confiné au niveau d'un mur de protection situé en amont de chacun des halls expérimentaux. Notre tube de visée traversant le mur protégeant le hall A, nous avons dû rendre notre installation étanche aux déplacements d'air. Ceci est réalisé en reliant de manière étanche les tubes aux enceintes cylindriques contenant les paires de miroirs et en bouchant l'extrémité de l'enceinte de la paire d'autocollimation (côté miroir B1) par une pièce en PVC. Ce bouchon est temporairement retiré pour les visées à partir du point A.

La reproductibilité obtenue dans ces conditions est de 1" à 2" d'arc pour la mesure de l'angle horizontal qui nous intéresse. Sur l'angle vertical la reproductibilité est de 10" d'arc environ. Ceci donne une idée de la différence d'amplitude du phénomène pour les directions horizontale et verticale.

2.2.3 Fréquence des mesures

On a vu que l'angle de référence s'obtenait à partir de la calibration des paires de miroirs et de visées en amont et en aval de l'arc. La calibration des paires de miroirs et les visées en amont de l'arc, c'est-à-dire en amont du mur de protection, ne peuvent s'effectuer que lors des arrêts techniques annuels car elles nécessitent un accès dans l'enceinte de l'accélérateur. Les visées au niveau du banc de mesure aval peuvent quant à elles être effectuées plus fréquemment car elles ne nécessitent qu'un accès dans le hall expérimental dont la fréquence est fonction de l'expérience. Etant donné que la paire de miroirs d'auto-

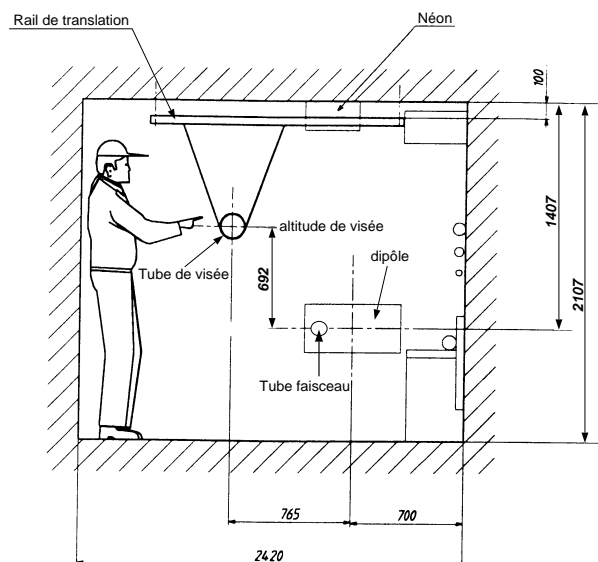


Figure 2.15 - *Equipement du tunnel pour la visée par autocollimation sur le miroir B2. La vue est dirigée vers le banc de mesure en amont de l'arc. Cette portion du tunnel se situe en amont du mur de protection. En cas de nécessité, les tubes peuvent être temporairement translatés vers la droite de la figure de manière à libérer le passage.*

collimation est supportée par le banc de mesure d'amont, dans l'éventualité de mouvement du sol, c'est bien cette dernière visée que nous devons effectuer fréquemment.

2.2.4 Résultat pour l'angle de référence

A partir des visées effectuées en amont et en aval de l'arc et de la calibration des paires de miroirs, nous déterminons l'angle de référence à l'aide d'un programme écrit en fortran 77. Les différentes visées avant et après retournement sont saisies au clavier et traitées. Lorsque plusieurs visées sont effectuées au niveau de chacun des bancs de mesure, les angles δ et α donnés par le programme sont le résultat d'une moyenne.

δ	0.0332°	visées directes des mires + autocollimation miroir B1
α	6.1368°	visées directes des mires + autocollimation miroir B2
$\beta + 2\gamma$	28.1581°	calibration : "collimation croisée" + autocollimations
$\theta_{réf}$	34.3282°	somme des trois angles ci-dessus

Tableau 2.8 - *Angle de référence obtenu à partir des mesures effectuées en février 1997.*

Sur le banc de mesure d'amont, le décalage entre l'emplacement du théodolite et le segment reliant les deux mires est de $33\mu\text{m}$. Sur le banc de mesure d'aval, ce décalage est de 1.121mm.

On signale qu'à titre de contrôle, en juillet 98, les géomètres de Jefferson Lab. mesureront l'angle de référence par une méthode indépendante dite de triangulation.

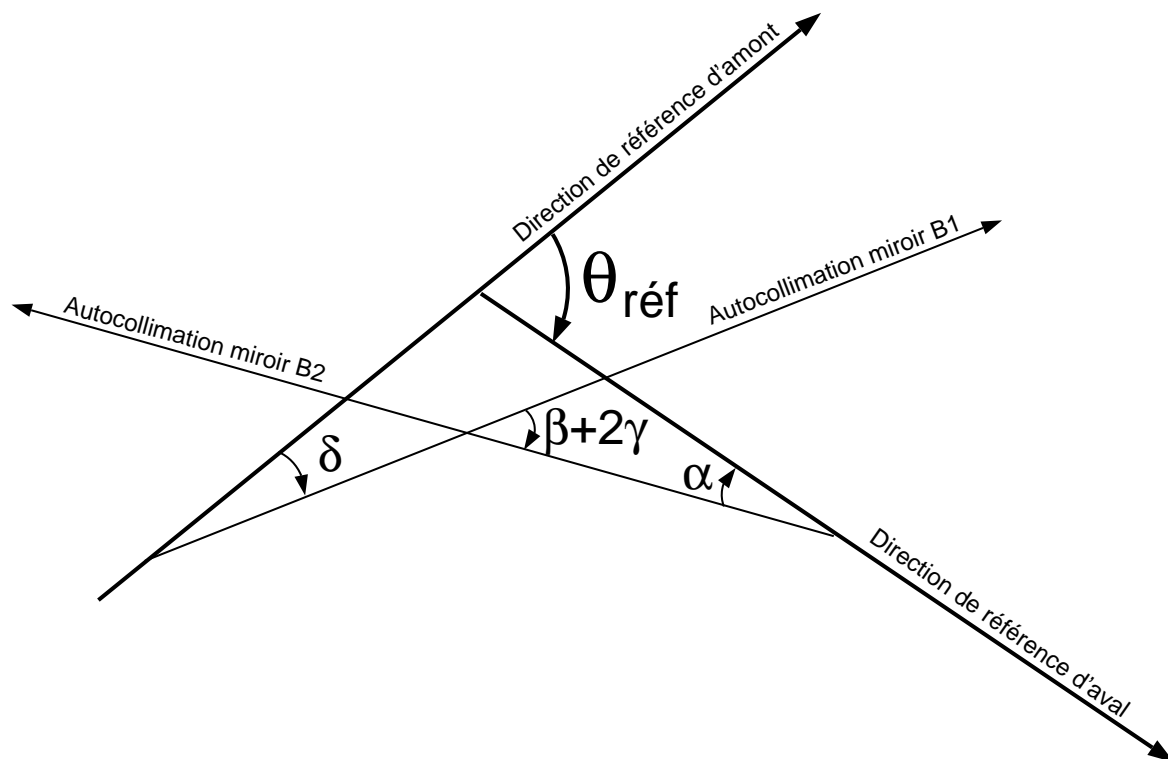


Figure 2.16 -

2.3 Résultat et précisions

En référence aux conventions du début de ce chapitre (figure [2.1]), l'angle absolu de déviation du faisceau s'obtient en ajoutant l'angle de référence aux angles relatifs d'amont et d'aval. Cette somme est effectuée dans le programme d'analyse des profils dans lequel la mesure la plus récente de l'angle de référence figure en paramètre. A titre d'exemple, si on adopte les angles relatifs d'amont et d'aval cités au paragraphe 2.1, l'angle absolu de déviation du faisceau dans l'arc menant au hall A est :

$$\boxed{\theta = 34.2565^\circ} \quad (2.13)$$

Avant de conclure ce chapitre, il reste à étudier les différents types d'erreurs qui influent sur la précision de la mesure de l'angle absolu de déviation du faisceau. Les principales conventions et notations auxquelles nous ferons référence tout au long de cette étude sont présentées sur la figure [2.17].

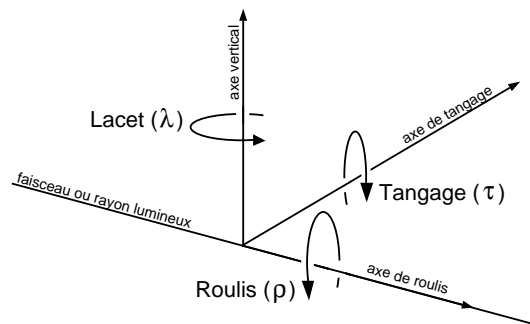


Figure 2.17 - Définitions du lacet, roulis et tangage. La direction de l'axe de roulis coïncide avec celle du faisceau ou du rayon lumineux.

Nous utiliserons également les notations suivantes :

$2R$: distance entre les deux fils de mire d'un même banc de mesure. Pour les calculs d'erreur on adopte $2R = 3708\text{mm}$ (distance minimale entre deux fils de mire d'un même banc, banc d'aval).

D : distance entre le fil de mire et le fil de mesure vertical. Pour les calculs, on prend $D = 235\text{mm}$.

Dans le but de déterminer la précision sur la mesure de l'angle de déviation du faisceau, nous passerons en revue les erreurs contribuant à l'angle relatif puis à l'angle de référence. Dans les deux cas, nous commencerons par détailler la cause de chacune des erreurs prise isolément puis indiquerons la tolérance qui engendrerait une erreur de 10^{-5} sur la mesure de l'angle de déviation (mesure d'énergie). Cette valeur sera comparée à l'incertitude réelle liée à notre appareillage. Seules les sources d'erreur dominantes seront prises en compte.

2.3.1 Bilan des erreurs sur l'angle relatif

En référence à la figure [2.17], on définit l'axe de roulis orienté selon la direction du faisceau nominal et l'axe de tangage comme l'axe horizontal transverse à l'axe précédent. L'axe y est la verticale (axe de lacet), son origine coïncide avec l'altitude du faisceau nominal. L'axe x , axe de translation du profileur, coïncide ici avec l'axe de tangage et l'axe z , axe du faisceau, coïncide avec l'axe de roulis.

– Liaison fil de mire - fil de mesure vertical :

On rappelle que la distance D entre le fil de mire et le fil de mesure vertical, d'environ 235mm, est mesurée sur une machine-outil. Cette mesure a été effectuée pour les différentes combinaisons (porte-cartouche, cartouche) dans l'éventualité d'un changement de cartouche. Une erreur sur D contribue au premier ordre à la mesure d'énergie. L'erreur commise lors de cette mesure est $\Delta x = \pm 5\mu\text{m}$.

– Verticalité du fil de mesure dans le plan perpendiculaire au faisceau :

Compte tenu de la précision du contrôle dimensionnel précédent, l'angle φ du fil par rapport à la verticale dans le plan perpendiculaire au faisceau est connu à $\pm 0.5\text{mrad}$ (2 mesures à $\pm 5\mu\text{m}$ à une distance de 20mm, longueur du fil de mesure vertical). La contribution de cette erreur à la mesure de l'angle de déviation est du second ordre. Soit y_{faisceau} la différence d'altitude entre l'axe réel du faisceau et l'axe nominal du faisceau. $\varphi \ll 1\text{rad}$ et $y_{\text{faisceau}} \ll 2R$ sont traités comme des infiniment petits.

– Désalignement du profileur :

• *Roulis du profileur :*

L'axe de translation de l'équipage mobile fait un angle ρ avec le plan horizontal. Cette erreur fait intervenir au premier ordre l'altitude $y_{\text{mire}} (=14\text{mm})$ du fil de mire par rapport à l'axe faisceau (figure [2.18]).

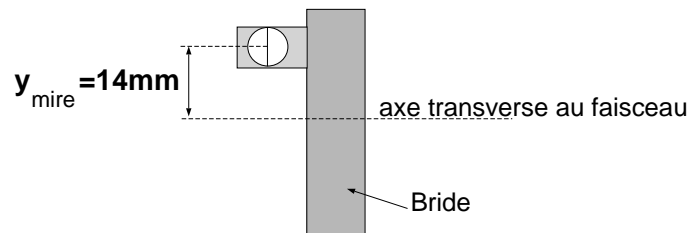


Figure 2.18 - Différence d'altitude entre le fil de mire et l'altitude de l'axe faisceau.

Le nivellement des profileurs est contrôlé par des niveaux à bulle de sensibilité $\pm 1\text{mrad}$. Par conséquent, l'angle de roulis du profileur ρ ne peut excéder $\pm 1\text{mrad}$ ($\rho \ll 1\text{rad}$).

• *Tangage du profileur :*

Si le profileur tangue d'un angle τ par rapport à l'axe du faisceau (figure [2.19]), l'erreur induite sur l'angle de déviation est du troisième ordre.

Elle fait intervenir la différence d'altitude y_{faisceau} entre l'axe réel et l'axe nominal du faisceau ainsi que l'angle θ_f (ou θ_i) dans le plan horizontal formé entre l'axe réel et l'axe nominal du faisceau. Les quantités $\tau \ll 1\text{rad}$ et $y_{\text{faisceau}} \ll 2R$ sont considérées comme infiniment petites. Pour le calcul, on choisit de prendre $\theta_f = 1.7\text{mrad} = 0.1^\circ$. On note que cette valeur est supérieure à tous les angles relatifs, d'amont ou d'aval, que nous avons mesurés (angle relatif maximum mesuré : $\theta_f \simeq 0.06^\circ$). Comme pour le contrôle de l'angle de roulis, un niveau à bulle nous garantit que $\tau < 1\text{mrad}$.

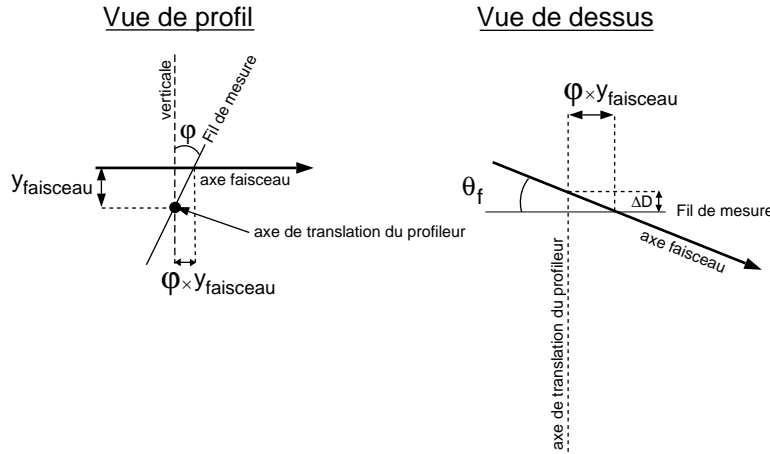


Figure 2.19 - Illustration du tangage du profileur relativement à l'axe faisceau.

- *Lacet du profileur :*

L'angle de lacet λ est l'angle dans le plan horizontal formé entre l'axe de translation du profileur et la perpendiculaire au faisceau. Pour placer l'axe de translation du profileur perpendiculaire à l'axe faisceau, on a utilisé l'autocollimation sur un miroir appuyé sur une arête fraisée de la mécanique du profileur parallèle à l'axe de translation. Cette procédure nous assure que λ est inférieur à 0.3mrad ($1'$ d'arc). λ est considéré comme un infiniment petit. L'erreur induite par un angle de lacet du profileur est du deuxième ordre.

– Erreurs de positionnement du profileur :

- *Selon l'axe x :*

Une erreur de positionnement du profileur selon l'axe x a une incidence sur la direction de référence. Celle-ci étant définie comme arbitraire, l'erreur induite sur l'angle de déviation est nulle.

- *Selon l'axe y :*

La grandeur à prendre en compte est la différence d'altitude effective entre l'axe du profileur et le faisceau réel. Les conséquences d'une telle erreur ont déjà été considérées lors de l'erreur sur la verticalité du fil de mesure.

- *Selon l'axe z :*

Une erreur $\Delta(2R)$ de positionnement d'un profileur selon l'axe z induit une erreur sur la distance $2R$ qui sépare les fils de mire des deux profileurs d'un même banc et par suite une erreur sur l'angle relatif associé. Sa contribution à l'angle de déviation est du deuxième ordre. Pour le calcul, on choisit $\theta_f = 1.7 \text{ mrad}$ ($\ll 1 \text{ rad}$).

- Linéarité de la vis à bille et du codeur :

La position de référence de l'équipage mobile a été choisie de sorte que dans cette position, le fil de mesure vertical soit sur l'axe nominal du faisceau. Dans ces conditions, une erreur de linéarité de la vis à bille ou du codeur ne porte que sur la distance de quelques millimètres qui sépare le faisceau réel du faisceau nominal. Etant donné la précision du codeur et de la vis à bille, cette erreur est négligeable par rapport à toutes les autres et ne figurera pas dans le tableau récapitulatif (2.9).

- Effet thermique :

Puisque pour mesurer les angles relatifs, on s'intéresse uniquement à la différence des positions du faisceau vue par les deux profileurs d'un même banc de mesure, seule la différence de température entre les équipages mobiles de ces deux profileurs pourra induire une erreur du premier ordre sur la mesure de l'angle de déviation. En effet, si la température des deux équipages mobiles est différente, les distances D ($\simeq 235 \text{ mm}$) séparant le fil de mire du fil de mesure vertical de chaque profileur vont varier différemment. Pour le calcul, on rappelle que l'équipage mobile est en acier inoxydable de coefficient thermique $C_T = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Les effets thermiques sur les bancs de mesure n'induisent aucune erreur du premier ordre sur la mesure de l'angle de déviation à l'exception de la torsion qui nécessiterait une distribution de température tellement particulière à la surface du cylindre qu'elle est improbable. Un changement global de température du tunnel entraîne une dilatation globale du banc. Les rails qui guident les deux pieds mobiles du banc, cf. 2.1.1, sont orientés parallèlement à la direction de référence, de sorte que l'angle du banc dans le plan horizontal n'est pas affecté. Par conséquent, les effets de température sur les bancs de mesure seront négligés.

- Erreurs sur la détermination de la position horizontale du barycentre du faisceau :

- *Erreur statistique $\sigma(\overline{X})$:*

Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un bruit aléatoire de moyenne nulle s'ajoutant au signal à chaque acquisition. Ce bruit aléatoire est celui qui subsiste après traitement du signal brut exposé dans le paragraphe 2.1.4 page 159. Soit B le niveau *rms* du bruit et S l'intégrale du signal définis ci-après. En utilisant pour les intégrales la méthode des trapèzes à pas

constant, l'erreur statistique $\sigma(\overline{X})$ induite par le bruit sur la position \overline{X} du barycentre du faisceau s'écrit :

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{\frac{L \Delta X}{12}} \frac{B L}{S} \quad (2.14)$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^N (V_i)^2} \quad i \in \text{zone de bruit, } N : \text{nombre de points dans cette zone,}$$

$$S = \Delta X \sum_i V_i \quad i \in \text{zone de recherche étroite du pic,}$$

L : longueur de la zone de recherche étroite du pic, cf. page 163,

ΔX : pas d'acquisition.

Pour le calcul de l'erreur statistique sur la détermination de la position du barycentre du faisceau, on adopte un rapport signal sur bruit de 20 mais celui que l'on obtient généralement est de l'ordre de 50. La largeur de la zone de recherche étroite que l'on utilise pour l'estimation de cette erreur est de 5mm. Ceci correspond au cas d'un faisceau dispersif (profileurs du banc de mesure d'aval).

- *Erreur due à l'instabilité du faisceau dans le plan horizontal:*

Cette erreur contribue au premier ordre à l'angle de déviation du faisceau. En nous basant sur les essais préliminaires que nous avons effectués, nous ne sommes pas en mesure de chiffrer cette erreur car le faisceau était trop instable en position. Notre mesure d'énergie nécessite une tolérance correspondant à un effet de 10^{-5} sur l'angle de déviation soit $15\mu\text{m}$. La stabilité du faisceau devrait être améliorée par les études en cours à Jefferson Lab. ("Fast Feedback").

Dans le tableau (2.9) sont rassemblées les sources d'erreurs principales ayant une incidence notable sur l'angle de déviation du faisceau. Dans le tableau (2.11), on a choisi de présenter la somme linéaire et quadratique des erreurs pour un et quatre profileurs.

2.3.2 Bilan des erreurs sur l'angle de référence

Les incertitudes sur la mesure de l'angle de référence sont principalement liées aux erreurs commises sur les différentes visées. Un mauvais positionnement des paires de miroirs ainsi qu'un décalage du théodolite par rapport au plan vertical passant par les deux fils de mire contribueront également à une incertitude sur la détermination de l'angle de référence.

- Désalignement des paires de miroirs :

L'axe de roulis des deux paires de miroirs est choisi le long de l'axe du rayon lumineux provenant de l'aval de l'arc. L'axe de tangage, situé dans le plan horizontal, est perpendiculaire à l'axe de roulis. On rappelle (cf. page 168) que

Causes d'erreur	Ordre	Formule	Valeur des incertitudes	Contribution à $(\Delta\theta/\theta)$	Tolérance pour $(\Delta\theta/\theta)=10^{-5}$
Contrôle dimensionnel	1	$\Delta\theta = \frac{\Delta D}{2R}$	$ \Delta D < 5\mu\text{m}$	$\left \frac{\Delta\theta}{\theta}\right < 2.25 \cdot 10^{-6}$	$\Delta D=22\mu\text{m}$
Verticalité du fil de mesure	2	$\Delta\theta = \frac{\varphi y_{\text{faisceau}}}{2R}$	$ \varphi < 0.5\text{mrad}$ $ y_{\text{faisceau}} < 1\text{mm}$	$2.25 \cdot 10^{-7}$	$(\phi=5\text{mrad}) \times (y_{\text{faisceau}}=5\text{mm})$
Roulis du profileur	1	$\Delta\theta = \frac{\rho y_{\text{mire}}}{2R}$	$ \rho < 1\text{mrad}$ $y_{\text{mire}}=14\text{mm}$	$6.3 \cdot 10^{-6}$	$\rho = 1.6 \text{ mrad}$
Tangage du profileur	3	$\Delta\theta = \frac{\tau y_{\text{faisceau}} \theta_f}{2R}$	$ \tau < 1\text{mrad}$ $ y_{\text{faisceau}} < 1\text{mm}$ $ \theta_{i/f} < 1.7\text{mrad}$	$8 \cdot 10^{-10}$	$\tau \times y_{\text{faisceau}} \times \theta_f$ $(28\text{mrad}) \times (28\text{mm}) \times (28\text{mrad})$
Lacet du profileur	2	$\Delta\theta = \frac{\lambda^2}{2} \frac{D}{2R}$	$ \lambda < 0.3\text{mrad}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$\lambda=14 \text{ mrad}$
Position en x du profileur	aucun	Contribution nulle à tous les ordres.			
Position en y du profileur	aucun	Contribution nulle à tous les ordres.			
Position en z du profileur	2	$\Delta\theta = \theta_{i/f} \frac{\Delta(2R)}{2R}$	$ \Delta(2R) < 5\text{mm}$ $ \theta_{i/f} < 1.7\text{mrad}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$\Delta(2R)=13\text{mm}$
Effet thermique	1	$\Delta\theta = \frac{D\Delta T C_T}{2R}$	$ \Delta T < 1\text{K}$ $(C_T=10^{-5} \text{ K}^{-1})$	$1 \cdot 10^{-6}$	$ \Delta T =10\text{K}$
Incertitude statistique sur la détermination de la position du barycentre du faisceau	1	$\sigma(\theta) = \frac{\sigma(\bar{X})}{2R}$	$L < 5\text{mm}$ $\Delta X=15\mu\text{m}$ $\frac{S}{BL} < 20$ $\rightarrow \sigma(\bar{X}) < 4\mu\text{m}$	$(1.8 \cdot 10^{-6})$ $3.6 \cdot 10^{-6}(2\sigma)$	$\sigma(\bar{X})=22\mu\text{m}$
Stabilité du faisceau	1	$\Delta\theta = \frac{\Delta\bar{X}}{2R}$	$ \Delta\bar{X} < 15\mu\text{m} \text{ (objectif)}$	$6.7 \cdot 10^{-6}$	$ \Delta\bar{X} < 15\mu\text{m}$

Tableau 2.9 - Contribution de chacune des sources d'incertitude sur la mesure de l'angle de déviation (θ) du faisceau et tolérances nécessaires pour qu'une incertitude isolée produise une erreur de 10^{-5} sur θ . Ce tableau se réfère à un seul profileur.

deux niveaux à bulle d'une sensibilité de $\pm 1\text{mrad}$ garantissent la verticalité des plans des deux miroirs de chaque paire. Le roulis ρ et le tangage τ se réfèrent à cette position idéale. Les effets du roulis, tangage des paires de miroirs d'autocollimation et de déviation sont détaillés dans l'annexe J.

– Erreurs de visées :

Trois visées sont nécessaires à la mesure de chacun des angles α , $(\beta + 2\gamma)$ et δ qui nous intéressent. On rappelle qu'en pratique chaque visée est le résultat de la moyenne de deux mesures élémentaires dont l'une est la mesure "retournée" de l'autre, cf. annexe I.3. A chaque visée, nous attribuerons une incertitude de $1''$ d'arc à l'exception de deux cas :

- l'autocollimation à longue distance (mesure de α) : $|\Delta\alpha| < 2''$ d'arc,
- la "collimation croisée double" : $0.7''$ d'arc

– Erreur sur la mesure de la distance $2R$ due à un mauvais positionnement du théodolite :

Rappelons que nous ne supposons pas que l'axe du théodolite est situé dans le plan vertical passant par les deux mires d'un même banc de mesure. Soit d (2.12) la distance séparant le théodolite du segment reliant les deux mires. Pratiquement, le théodolite a été positionné tel que $|d| < 2\text{mm}$. Une erreur sur la mesure de $2R$, en amont et en aval de l'arc, contribue au deuxième ordre à la mesure des angles δ et α .

Notons que l'incertitude sur la mesure de $2R$ intervient à deux titres :

- en produit de $\theta_{i/f}$ dans le tableau (2.9),
- en produit de d dans le tableau (2.10).

2.3.3 Précision sur l'angle absolu de déviation du faisceau

Nous avons porté dans les tableaux (2.11), (2.12) et (2.13) le bilan partiel et total des incertitudes sur la mesure de l'angle θ de déviation du faisceau.

Deux règles ont été adoptées :

- d'une part, la somme linéaire de toutes les sources d'erreurs identifiées conduisant à $\frac{\Delta\theta}{\theta} < 1.9 \cdot 10^{-4}$ donc à une contribution de $1.9 \cdot 10^{-4}$ à la mesure d'énergie. Cette valeur doit être interprétée comme la demi-largeur de la base de la distribution de l'incertitude finale.
- d'autre part, nous avons interprété les erreurs énumérées dans les tableaux (2.9) et (2.10) comme les demi-largeurs E_i d'une distribution d'erreur uniforme. Nous avons alors calculé la variance σ de la distribution totale selon la formule :

$$\left[\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} \right]^2 = \frac{\sum_i E_i^2}{3} \quad (2.15)$$

Causes d'erreur	Ordre	Formule	Valeur des incertitudes	Contribution à $(\Delta\theta/\theta)$	Tolérance pour $(\Delta\theta/\theta)=10^{-5}$
Roulis de la paire d'autocollimation	2	$\Delta\theta = \frac{\rho^2 \sin 2\beta}{4}$	$ \rho < 1\text{mrad}$ $\beta = 0.13\text{rad} (7.5^\circ)$	$\left \frac{\Delta\theta}{\theta}\right < 1.10^{-7}$	$\rho = 10\text{mrad}$
Tangage de la paire d'autocollimation	2	$\Delta\theta = \frac{\tau^2 \sin 2\beta}{4}$	$ \tau < 1\text{mrad}$ $\beta = 0.13\text{rad} (7.5^\circ)$	1.10^{-7}	$\tau = 10\text{mrad}$
Lacet de la paire d'autocollimation	Aucun	Contribution nulle à tous les ordres.			
Roulis de la paire de déviation	2	$\Delta\theta = \frac{\rho^2 \sin 4\gamma}{4}$	$ \rho < 1\text{mrad}$ $2\gamma = 0.36\text{rad} (20.7^\circ)$	3.10^{-7}	$\rho = 6\text{mrad}$
Tangage de la paire de déviation	2	$\Delta\theta = \frac{\tau^2 \sin 2\gamma (2 - \cos 2\gamma)}{2}$	$ \tau < 1\text{mrad}$ $2\gamma = 0.36\text{rad} (20.7^\circ)$	3.10^{-7}	$\tau = 6\text{mrad}$
Lacet de la paire de déviation	Aucun	Contribution nulle à tous les ordres.			
Visées pour δ	1	mire d'amont	$ \Delta V_{mAm} < 5\mu\text{rad}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$\Delta V_{mAm} = 6\mu\text{rad}$
	1	mire d'aval	$ \Delta V_{mAv} < 5\mu\text{rad}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$\Delta V_{mAv} = 6\mu\text{rad}$
	1	autocollimation	$ \Delta A < 5\mu\text{rad}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$\Delta A = 6\mu\text{rad}$
	1	Total	$ \Delta\delta < 15\mu\text{rad}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$\Delta\delta = 6\mu\text{rad}$
Visées pour α	1	mire d'amont	$ \Delta V_{mAm} < 5\mu\text{rad}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$\Delta V_{mAm} = 6\mu\text{rad}$
	1	mire d'aval	$ \Delta V_{mAv} < 5\mu\text{rad}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$\Delta V_{mAv} = 6\mu\text{rad}$
	1	autocollimation LD	$ \Delta A_{LD} < 10\mu\text{rad}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$\Delta A_{LD} = 6\mu\text{rad}$
	1	Total	$ \Delta\alpha < 20\mu\text{rad}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$	$\Delta\alpha = 6\mu\text{rad}$
Calibration ($\Omega = \beta + 2\gamma$)	1	autocollimation	$ \Delta A < 5\mu\text{rad}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$\Delta A = 6\mu\text{rad}$
	1	autocollimation	$ \Delta A < 5\mu\text{rad}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$\Delta A = 6\mu\text{rad}$
	1	CCD	$ \Delta(CCD) < \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.5\mu\text{rad}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$	$\Delta(CCD) = 6\mu\text{rad}$
	1	Total	$ \Delta\Omega < 13.5\mu\text{rad}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$\Delta\Omega = 6\mu\text{rad}$
Mesure de $2R$	2	$\Delta\theta = \frac{\Delta(2R)d}{2R^2}$	$ \Delta(2R) < 5\text{mm}$ $ d < 2\text{mm}$ $R = 2\text{m}$	2.10^{-6}	$\Delta(2R) = 24\text{mm}$

Tableau 2.10 - Contribution de chacune des sources d'erreurs à l'angle de déviation du faisceau θ et tolérance nécessaire pour qu'une incertitude isolée produise une erreur de 10^{-5} sur θ . (LD : Longue distance. ΔV_{mAm} , ΔV_{mAv} : incertitudes sur les visées des mires d'amont (mAm) et d'aval (mAv). ΔA , ΔA_{LD} : incertitudes sur les visées en autocollimation. CCD : "collimation croisée double".)

(Le facteur 3 provient du calcul de la variance d'une distribution uniforme.)

La somme quadratique conduit à une variance de la distribution des incertitudes $\frac{\sigma(\theta)}{\theta} = 2.2 \cdot 10^{-5}$.

L'interprétation de ces résultats sera discutée dans la conclusion générale de la mesure d'énergie, chapitre 4.

	Somme linéaire des erreurs	Somme quadratique des erreurs
Pour 1 profileur	$\frac{\Delta\theta}{\theta} < 2.4 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = 6.0 \cdot 10^{-6}$
Pour les 4 profileurs	$\frac{\Delta\theta}{\theta} < 1.0 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = 1.2 \cdot 10^{-5}$

Tableau 2.11 - *Contribution cumulée des incertitudes figurant dans le tableau (2.9) à la mesure de l'angle de déviation du faisceau. Somme linéaire et quadratique des incertitudes pour 1 et 4 profileur(s).*

Précision sur le calcul d'incertitude de la mesure de l'angle de référence :

Les défauts d'horizontalité des paires de miroirs ont contribué deux fois : une première fois au titre de la mesure de calibration de l'angle Ω et une seconde fois au titre de la mesure de l'angle α .

L'erreur de mesure sur la distance $2R$ a été prise en compte dans le calcul de l'incertitude sur la mesure de l'angle α et dans le calcul de l'incertitude sur la mesure de l'angle δ .

	Somme linéaire des erreurs	Somme quadratique des erreurs
α	$\frac{\Delta\theta}{\theta} < 3.5 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = 1.3 \cdot 10^{-5}$
$(\beta + 2\gamma)$	$\frac{\Delta\theta}{\theta} < 2.5 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = 0.8 \cdot 10^{-5}$
δ	$\frac{\Delta\theta}{\theta} < 2.7 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = 0.9 \cdot 10^{-5}$
$\theta_{réf}$	$\frac{\Delta\theta}{\theta} < 8.7 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = 1.8 \cdot 10^{-5}$

Tableau 2.12 - *Incertainitude relative de chacune des trois mesures d'angle contribuant à l'angle de référence.*

Précision sur l'angle absolu de déviation du faisceau :

A partir des tableaux (2.11) et (2.12), associés respectivement à l'angle relatif et à l'angle de référence, on obtient l'incertitude relative sur l'angle de déviation du faisceau, cf. tableau (2.13).

A partir du tableau (2.13), l'angle de déviation du faisceau qui, rappelons-le, a été mesuré en février 1997 dans des conditions proches de celles prévues pour la mesure de l'énergie, prend la valeur :

$$\theta = 34.2565^\circ \begin{cases} (\pm 6.5 \cdot 10^{-3})^\circ & \text{somme linéaire} \\ (\pm 0.8 \cdot 10^{-3})^\circ & \text{somme quadratique} \end{cases} \quad (2.16)$$

	Somme linéaire des erreurs	Somme quadratique des erreurs
Angle relatif	$\left \frac{\Delta\theta}{\theta} \right < 1.0 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = 1.2 \cdot 10^{-5}$
Angle de référence	$\left \frac{\Delta\theta}{\theta} \right < 8.7 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = 1.8 \cdot 10^{-5}$
Angle absolu de déviation	$\left \frac{\Delta\theta}{\theta} \right < \mathbf{1.9 \cdot 10^{-4}}$	$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\theta} = \mathbf{2.2 \cdot 10^{-5}}$

Tableau 2.13 - *Incertitude relative sur la mesure de l'angle de déviation du faisceau.*

Chapitre 3

Intégrale absolue de champ magnétique

De manière analogue à ce que nous avons fait pour l'angle de déviation, nous déterminons l'intégrale absolue de champ magnétique le long de la trajectoire des électrons dans l'arc de déviation en deux étapes : mesure d'une intégrale de référence et mesure d'une intégrale relative.

- intégrale de champ de référence : intégrale de champ du dipôle de référence (9^{ème} dipôle). Ce dipôle de référence est alimenté en série avec les huit dipôles de déviation et il est situé en dehors du tunnel, il ne reçoit pas de tube à vide de faisceau. La mesure de l'intégrale de référence s'effectue à chaque mesure d'énergie. Pour cette mesure, on a conçu et réalisé un appareil, baptisé “mesureur”, qui s'insère dans l'entrefer du dipôle de référence. On signale que le principe de cette mesure a été présenté à la conférence internationale “Magnet Technology” et fait l'objet du rapport [27]. Les services techniques du DAPNIA impliqués dans cette mesure de précision sont le Service de Gestion des Programmes et d'Ingénierie (SGPI), le Service des Techniques Cryogéniques et Magnétiques (STCM) et le Service d'Instrumentation Générale (SIG).
- intégrale de champ relative : somme des écarts entre l'intégrale de champ de chacun des huit dipôles de l'arc et l'intégrale de champ de notre dipôle de référence. Cette mesure est effectuée à différents courants une fois pour toute. Pour cette mesure, on utilise un appareil déjà existant à CEBAF.

En tout premier lieu, nous présenterons les principales caractéristiques du dipôle de référence qui intervient dans les deux types de mesures. On souligne que ce dipôle est identique aux huit dipôles de l'arc. Après description du principe adopté pour la mesure de l'intégrale de champ de référence, nous dresserons le cahier des charges auquel doit répondre notre appareil. Ceci fait, nous détaillerons le mesureur du point de vue mécanique et électronique. Nous attacherons une importance particulière aux bobines de mesures qui sont les éléments vitaux de notre appareillage. A partir des cartes de champ établies pour le dipôle de référence, nous verrons comment corriger l'intégrale de champ rectiligne mesurée afin d'obtenir l'intégrale de champ le long de la trajectoire curviligne des électrons dans le dipôle. Dans une seconde partie, nous exposerons le principe de la mesure de l'intégrale relative et décrirons l'appareillage associé. Nous discuterons des résultats

existants et proposerons des améliorations pour la prochaine campagne de mesure. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre nous identifierons les sources d'erreur et quantifierons l'incertitude sur la mesure de l'intégrale absolue de champ magnétique.

Dans la suite, on se référera au système de coordonnées présenté sur la figure [3.1]. Les substantifs “amont” et “aval” sont relatifs au sens du faisceau dans les dipôles de

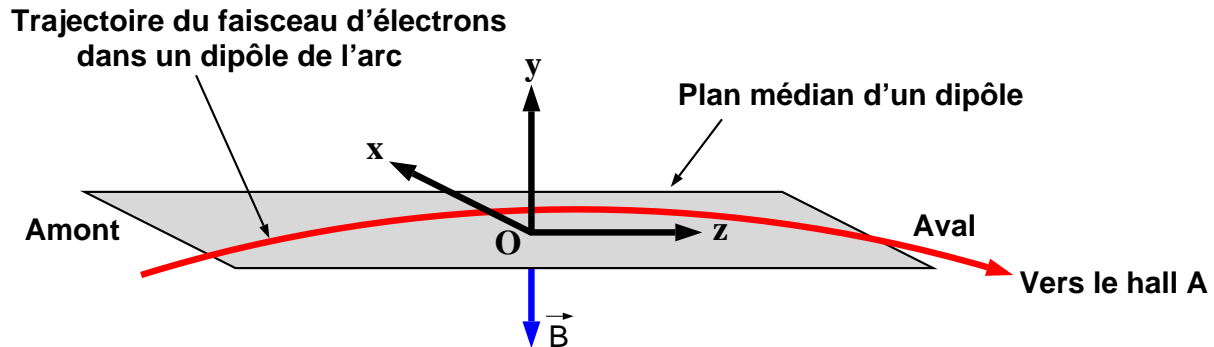


Figure 3.1 - *Système de coordonnées adopté dans le chapitre 3.*

l'arc. Par extension, nous les utiliserons aussi pour le dipôle de référence. Conformément au génie civil, le champ magnétique dans les dipôles de l'arc de déviation menant au hall A est dirigé selon la verticale descendante.

3.1 Dipôle de référence

Alimenté en série avec les huit dipôles de déviation, le dipôle de référence est situé hors du tunnel dans un local construit spécialement pour lui : le “dipole shed”. On mesure “en ligne” l'intégrale de champ du dipôle de référence, appelée intégrale de référence, en équipant son entrefer d'un appareil baptisé mesureur. Ce dernier sera décrit dans la section 3.2.3.

Comme exposé à la fin du chapitre 1 page 147, le dipôle de référence doit être aussi semblable que possible que les huit dipôles de l'arc. Par conséquent, les propriétés magnétiques du dipôle de référence ainsi que les conditions thermiques doivent être très proches de celles des huit dipôles situés dans le tunnel. Dans ce but, la température dans le “dipole shed” sera en permanence asservie à celle du tunnel (à $\pm 2^\circ \text{C}$) et le dipôle de référence a été réalisé sur le modèle des huit dipôles de déviation du faisceau :

- le fer provient de la même coulée,
- l'usinage du fer et l'assemblage du dipôle ont été réalisés par la même entreprise (Process Equipment Company, Ohio) à partir des mêmes plans,
- les bobines ont été réalisées par la même entreprise (Applied Magnetic Product, Californie) à partir des mêmes moules.

A Jefferson Lab, tous les dipôles longs de 3m, tels le dipôle de référence et les huit dipôles de déviation sont dits de type “BA”. Les principales caractéristiques de ces dipôles sont présentées dans le tableau (3.1).

<u>Entrefer :</u>	Δx 117.47mm Δy (25.4 \pm 0.015)mm Δz 3000mm
<u>Bobines :</u>	conducteur en cuivre (Outokumpu, Finlande) 4 doubles galettes refroidies par eau nombre total de tours : 40
<u>Masse :</u>	1753kg dont 150kg de cuivre
<u>Excitation maximale :</u>	$I_{\max} = 300\text{A}$ $B_{\max} = 0.59\text{T}$ $E_{\max} = 7.0\text{GeV}$
<u>Puissance électrique :</u>	4.7kW à 252A (R=75m Ω , E=6GeV)

Tableau 3.1 - *Principales caractéristiques des dipôles BA de CEBAF.*

Dans l’arc, les 8 dipôles BA sont alimentés de telle sorte que les électrons soient déviés d’un angle d’environ 4.29° par dipôle quelle que soit l’énergie du faisceau ($8 \times 4.29^\circ = 34.3^\circ$). Le tableau (3.2) présente le courant nécessaire pour dévier les électrons d’énergie comprise entre 0.5GeV et 7GeV.

Energie (GeV)	Intensité (A)	Champ central (T)
0.5	19	0.0375
0.8	30	0.0608
1.0	37	0.0750
2.0	75	0.1500
4.0	150	0.3000
7.0	300	0.5900

Tableau 3.2 - *Correspondance énergie / courant / champ central pour les dipôles de déviation de l’arc ainsi que pour le dipôle de référence.*

3.2 Mesure de l’intégrale de champ de référence

Dans cette partie, nous détaillerons la méthode que nous avons adoptée pour mesurer l’intégrale de champ du dipôle de référence avec une précision de quelques 10^{-5} . Nous décrirons l’appareil que nous avons conçu pour cette mesure de précision et déduirons des cartes de champ réalisées le facteur correctif à appliquer à l’intégrale rectiligne pour obtenir l’intégrale courbe le long du trajet des électrons.

3.2.1 Principe

Le principe de notre méthode repose sur la mesure de la force électromotrice “ V ” induite dans des bobines en translation dans l’entrefer d’un dipôle. Pour commencer, montrons qu’une seule bobine en translation dans un dipôle permet de mesurer son intégrale de champ. Par la suite, nous verrons qu’en utilisant deux bobines montées en série et séparées de la longueur de l’aimant on se ramène à une méthode de “zéro” permettant d’atteindre une meilleure précision tout en étant moins contraignante en ce qui concerne les tolérances.

3.2.1.1 Mesure de l’intégrale de champ d’un dipôle par la méthode d’une bobine de mesure en translation

Translatons dans le plan médian de l’entrefer d’un dipôle, selon Oz , une bobine d’aire magnétique \mathcal{A} dont l’axe est parallèle à la direction Oy du champ magnétique B . Les dimensions de la bobine sont supposées petites devant celle de l’entrefer. Soit z_1 le point de départ de la bobine et z_2 son point d’arrivée. Les positions z_1 et z_2 se situent de part et d’autre de l’aimant. Un voltmètre intégrateur, relié aux bornes de la bobine, mesure le flux magnétique intercepté par la bobine et donc le champ moyen à l’emplacement de la bobine si l’on connaît l’aire magnétique de la bobine. Ensuite, en intégrant sur la longueur du parcours le signal recueilli par le voltmètre, on accède à l’intégrale de champ magnétique. La figure [3.2] illustre les différentes étapes de ce scénario.

Après deux intégrations, temporelle et spatiale, on obtient l’intégrale de champ \mathcal{I} à une constante près :

$$\mathcal{I} = \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\int_{t(z_1)}^{t(z)} \frac{-V(t) dt}{\mathcal{A}} \right) = \int_{z_1}^{z_2} B(z) dz - \underbrace{(z_2 - z_1) B(z_1)}_{\simeq 0} \quad (3.1)$$

On souligne que si on s’arrange pour que $B(z_1)$ soit nul, alors \mathcal{I} est rigoureusement l’intégrale de champ le long du parcours ($z_1 \rightarrow z_2$). Remarquons que d’après la loi de Lenz, $V = -\frac{d\phi}{dt}$, il n’est pas nécessaire que la loi du mouvement de la bobine soit uniforme.

Un des inconvénients majeurs de cette méthode est qu’une mesure précise à 10^{-5} près nécessite entre autres de connaître l’aire magnétique de la bobine à 10^{-5} près et de calibrer le voltmètre avec une précision identique. C’est pourquoi, pour augmenter la précision de la mesure de l’intégrale de champ, nous transformons la méthode précédente en “méthode de zéro”, moins contraignante.

3.2.1.2 “Méthode de zéro”

Imaginons maintenant deux bobines identiques connectées en série et séparées d’une distance L_D proche de la longueur de l’aimant. Ces deux bobines sont fixées aux extrémités d’un équipage mobile commun capable de parcourir la grande longueur de l’aimant (selon Oz à $x = 0$, cf. figure [3.1]). On rappelle que le centre des surfaces polaires correspond à l’origine du repère ($z = z_0 = 0$, $x = 0$). Au départ, cf. figure [3.3], la bobine d’aval “B” est située au centre de l’aimant ($t = t_1 = 0$, $z_B = z_0$) tandis que la bobine d’amont “A” se

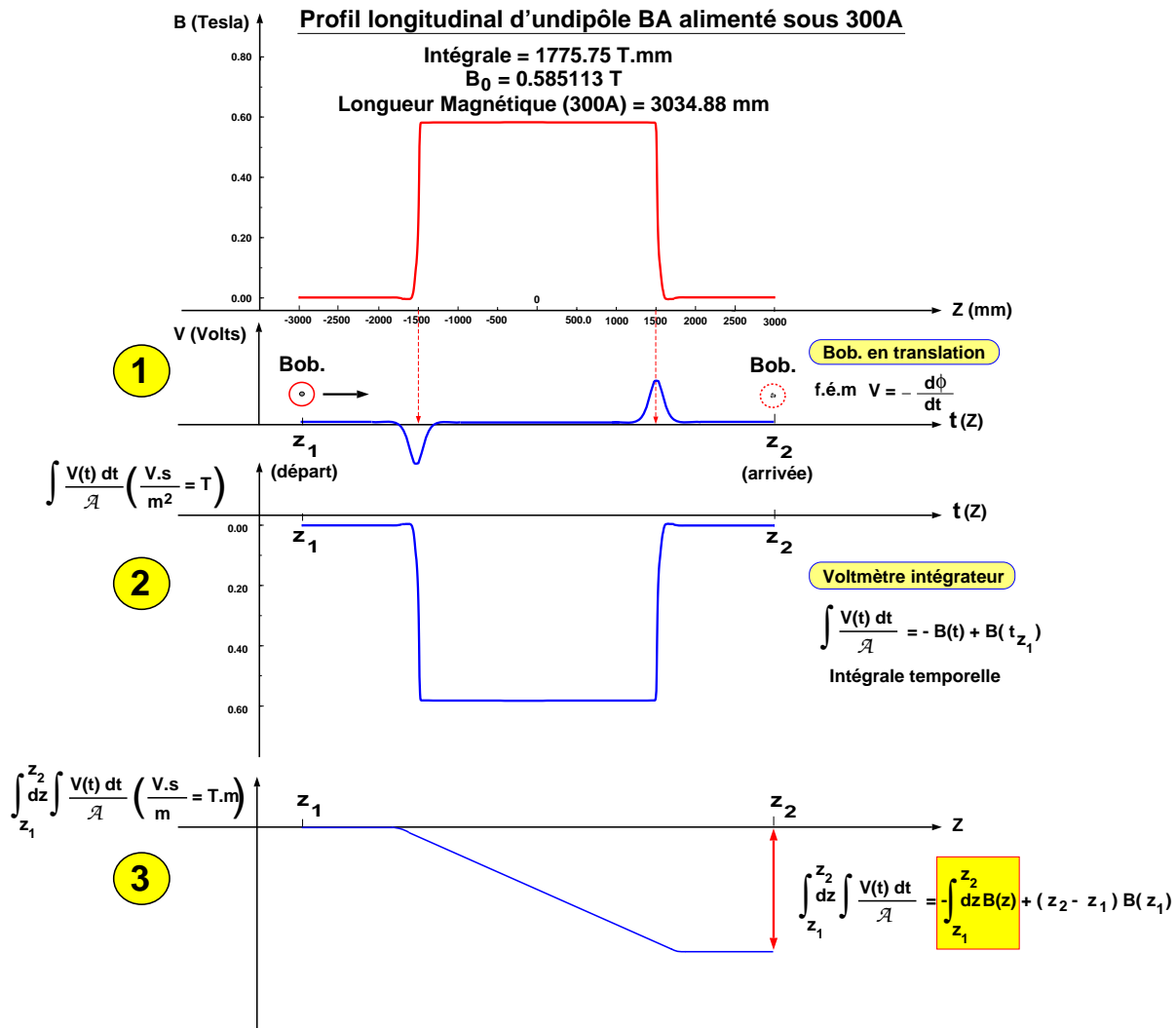


Figure 3.2 - Profil du champ magnétique dans un dipôle. 1- Force électromotrice induite dans la bobine en fonction du temps (le long du parcours). On note qu'il existe une relation biunivoque entre t et z . 2- Signal obtenu après intégration sur le temps (signal mesuré par le voltmètre intégrateur). 3- Signal obtenu après intégration sur le parcours du signal recueilli par le voltmètre intégrateur : intégrale de champ magnétique à une constante près.

trouve à l'extérieur du dipôle à une distance $\frac{L_D}{2}$ de la face d'amont de l'aimant ($t = t_1 = 0$, $z_A = z_0 - L_D$). A l'issue du parcours, la bobine A est située au centre de l'aimant ($t = t_2$, $z_A = z_0$) tandis que la bobine B est à une distance $\frac{L_D}{2}$ en aval du dipôle ($t = t_2$, $z_B = z_0 + L_D$).

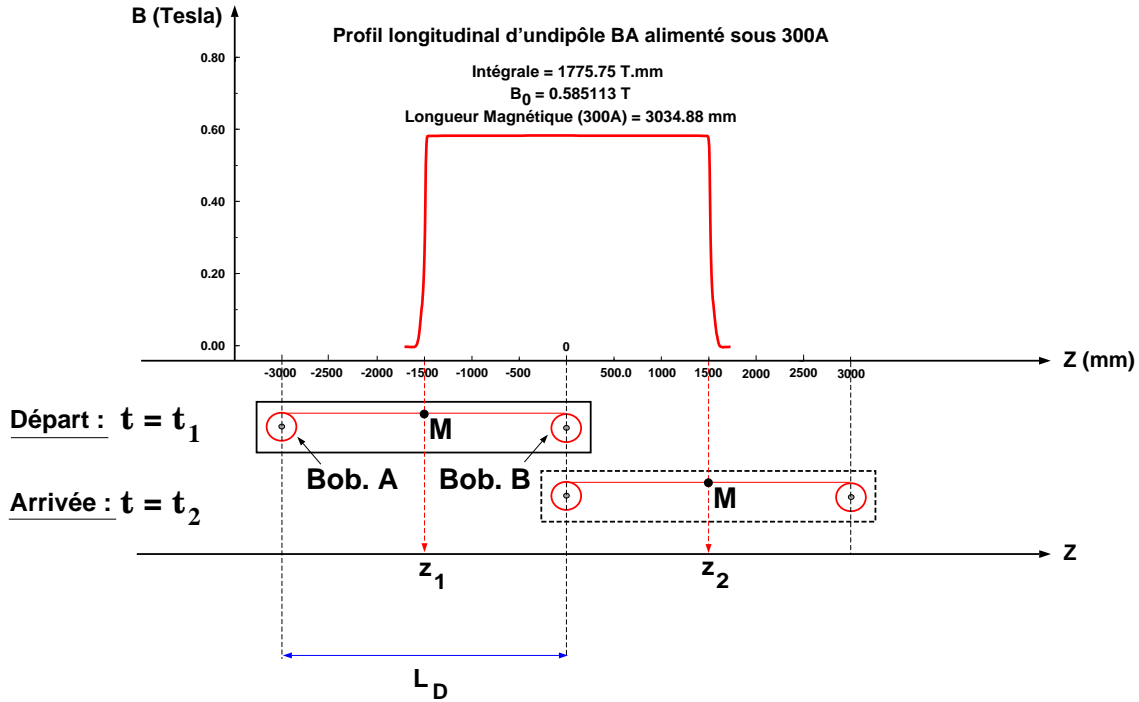


Figure 3.3 - Principe de la “méthode de zéro”. Le profil de champ représenté correspond à celui d'un dipôle BA alimenté à 300A ($E_{e-} = 7$ GeV).

Dans la suite, on repère la position de l'équipage mobile par la position du milieu M des deux bobines. Durant le temps $(t_2 - t_1)$, M se déplace de $z_1 = z_0 - \frac{L_D}{2}$ à $z_2 = z_0 + \frac{L_D}{2}$. Evaluons \mathcal{I} (3.1) en remplaçant V par :

$$V' = V_A + V_B \quad (3.2)$$

avec :

V_A (resp. V_B) : force électromotrice induite dans la bobine A d'amont (resp. B d'aval),

V' : force électromotrice des deux bobines montées en série.

\mathcal{I} s'écrit :

$$\mathcal{I} = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{t(z_1)}^{t(z)} \frac{-V' dt}{\mathcal{A}} \right) dz \quad (3.3)$$

$\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_B = \mathcal{A}$: aire magnétique des bobines.

Bobine A seule :

En se reportant à la figure [3.3], lorsque le milieu des deux bobines parcourt la distance $(z_2 - z_1)$, la bobine d'amont "A" se déplace de $(z_1 - \frac{L_D}{2})$ à $(z_1 + \frac{L_D}{2})$. En intégrant sur le temps et sur le parcours, on a :

$$\mathcal{I}_A = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{t(z_1)}^{t(z)} \frac{-V_A dt}{\mathcal{A}} \right) dz = \int_{z_1 - \frac{L_D}{2}}^{z_1 + \frac{L_D}{2}} B(z) dz - L_D B(z_1 - \frac{L_D}{2}) \quad (3.4)$$

Bobine B seule :

En se reportant à la figure [3.3], lorsque le milieu des deux bobines parcourt la distance $(z_2 - z_1)$, la bobine d'aval "B" se déplace de $(z_2 - \frac{L_D}{2})$ à $(z_2 + \frac{L_D}{2})$. En intégrant sur le temps et sur le parcours, on a :

$$\mathcal{I}_B = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{t(z_1)}^{t(z)} \frac{-V_B dt}{\mathcal{A}} \right) dz = \int_{z_2 - \frac{L_D}{2}}^{z_2 + \frac{L_D}{2}} B(z) dz - L_D B(z_2 - \frac{L_D}{2}) \quad (3.5)$$

Bobine A + bobine B :

Si :

- $B(z_1 - \frac{L_D}{2}) = 0$, c'est-à-dire si le champ est annulé au point de départ de la bobine A,
- $B(z_2 - \frac{L_D}{2}) = B_0$ mesuré avec précision par ailleurs,
- $(z_2 - z_1) = L_D$, c'est-à-dire si l'amplitude du déplacement $(z_2 - z_1)$ est rigoureusement égale à la distance entre les centres magnétiques des deux bobines.

Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{I}_A + \mathcal{I}_B \\ &= \int_{z_1 - \frac{L_D}{2}}^{z_2 + \frac{L_D}{2}} B(z) dz - L_D B_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

On constate que l'intégrale de champ que nous cherchons ($I = \int_{z_1 - \frac{L_D}{2}}^{z_2 + \frac{L_D}{2}} B(z) dz$) est bien égale à une constante près ($L_D B_0$) à l'intégrale mesurée \mathcal{I} . On a :

$$\boxed{I = \mathcal{I} + L_D B_0} \quad (3.7)$$

Si l'on compare ce résultat à celui obtenu avec une seule bobine (3.1), seule la constante d'intégration a changé : au lieu d'être nulle, elle représente ici la quasi-totalité de l'intégrale du champ. Au lieu d'intégrer le signal d'une seule bobine sur la totalité du trajet d'intégration, nous intégrons ici la somme des signaux de deux bobines, dont chacune parcourt la moitié du trajet.

Pour interpréter ce résultat en terme de longueur magnétique, définissons ce que l'on entend par longueur magnétique d'un dipôle.

Longueur magnétique d'un dipôle :

On définit la longueur magnétique L_0 d'un dipôle relativement à un point situé dans la région centrale de l'aimant. Soit $z_{\text{réf}}$ l'abscisse de ce point. L_0 s'écrit :

$$L_0 = L_0(z_{\text{réf}}) = \frac{\int B dz}{B(z_{\text{réf}})} \quad (3.8)$$

Cette définition ne nécessite plus de supposer uniforme le champ magnétique dans la région centrale, comme c'est le cas habituellement.

Comme nous avons supposé ici $z_2 - z_1 = L_D$, $z_{\text{réf}} = z_1 + \frac{L_D}{2} = z_2 - \frac{L_D}{2}$, c'est-à-dire que B_0 est pris au centre de l'aimant. Dans ces conditions, en divisant les deux membres de (3.6) par B_0 , champ mesuré au point de référence $z_{\text{réf}}$, on obtient :

$$S = \frac{\mathcal{I}}{B_0} = L_D - \frac{I}{B_0} = L_D - L_0(z_{\text{réf}}) \quad (3.9)$$

S représente le signal obtenu après intégration sur le temps et sur le parcours, normalisé au champ central B_0 .

En supposant B_0 connu, notre méthode consiste donc à mesurer la petite différence entre $L_0(z_{\text{réf}})$ et L_D , c'est-à-dire entre la longueur magnétique de l'aimant se référant au point $z = z_{\text{réf}}$ et la distance entre les centres des deux bobines. Ceci explique pourquoi nous qualifions cette méthode de "méthode de zéro". Une incertitude sur l'aire des bobines ou sur la calibration du voltmètre n'affecte alors que le petit terme S . Les seules grandeurs à connaître avec une précision de 10^{-5} sont finalement L_D et B_0 . En supposant que la différence entre L_D (distance entre les deux bobines) et $L_0(z_{\text{réf}})$ (longueur magnétique) soit de l'ordre de 5mm, la précision nécessaire sur l'aire magnétique \mathcal{A} des bobines et sur la calibration du voltmètre n'est en principe que de 1.5%.

A titre d'information, le tableau (3.3) présente l'intégrale rectiligne de champ et la longueur magnétique d'un dipôle BA pour différents courants. On note que l'amplitude de variation de la longueur magnétique sur toute la gamme d'excitation de l'aimant est de l'ordre de 10mm.

3.2.2 Cahier des charges

A la suite du principe exposé ci-dessus, voici les spécifications auxquelles doit répondre notre mesureur.

• Mesure de B_0 :

Le champ magnétique doit être mesuré en un point de référence de la région centrale du dipôle avec une précision relative au moins égale à 10^{-5} . Ce point doit correspondre au

Energie (GeV)	Intensité (A)	Intégrale (T.mm)	$B_{\text{réf}}$ (T)	Longueur magnétique (mm)
0.8	30	185.04	0.0608	3043.385
2.4	90	543.58	0.1787	3041.406
4	150	901.39	0.2964	3041.143
5.6	210	1256.61	0.4135	3039.059
7	300	1775.75	0.5851	3034.881

Tableau 3.3 - *Intégrale rectiligne de champ et longueur magnétique relative à $z_{\text{réf}} = 0$ à différents courants. Ces résultats ont été obtenus à partir de l'analyse des cartes de champs réalisées sur un des dipôle de l'arc.*

point d'arrivée de la bobine d'amont qui doit lui-même coïncider avec le point de départ de la bobine d'aval.

• Bobines de mesure :

Les deux bobines cylindriques doivent être identiques à 1% près du point de vue de leur aire magnétique. La tolérance sur cette identité sera discutée au paragraphe 3.4 page 219. La hauteur h de ces bobines doit leur permettre de pénétrer dans l'entrefer du dipôle ($h < \Delta y = 25.4\text{mm}$). De façon à ce que le champ mesuré par les bobines soit le champ en leur centre et non le champ moyenné sur leur volume, leur rapport d'aspect hauteur(h)-diamètre(\varnothing) doit vérifier (cf. annexe K et [30]) :

$$\frac{2h}{\varnothing} = \sqrt{3} \quad (3.10)$$

Le nombre de spires de chacune des bobines devra être ajusté en fonction de la vitesse de translation de l'équipage mobile, du profil du champ et de la plage de tension d'entrée acceptée par le voltmètre intégrateur :

$$\left| \left(\frac{dB(z - \frac{L_D}{2})}{dz} + \frac{dB(z + \frac{L_D}{2})}{dz} \right)_{\text{max}} \times \frac{\mathcal{A}}{v} \right| < 5V \quad (3.11)$$

avec v : vitesse de translation des bobines à leur entrée/sortie du dipôle de référence.

La distance entre les centres magnétiques des deux bobines doit être proche de la longueur magnétique de l'aimant et fixe lors du mouvement. Pour atteindre une précision de 10^{-5} sur la mesure de l'intégrale de champ, il est indispensable de connaître cette distance à 10^{-5} près, soit $30\mu\text{m}$ ($L_D \simeq 3000\text{m}$).

Les axes des deux bobines doivent être verticaux à 4mrad près. Les centres de chacune des bobines doivent appartenir au plan médian du dipôle avec une tolérance de 0.5mm.

• Mouvement d'ensemble des deux bobines :

Ce mouvement doit être une translation rectiligne avec une tolérance de $\pm 0.1\text{mm}$. L'axe de cette translation doit être parallèle au segment reliant les deux bobines avec une

tolérance de 0.1mm.

La mesure intégrale (3.1) s'étend du temps t_1 , appelé début de la mesure, à t_2 , appelé fin de mesure.

Il faut qu'à la fin de la mesure intégrale, la bobine d'amont soit à la position qu'occupait la bobine d'aval au début de la mesure avec une tolérance de 0.1mm en x et z . Il faut de plus que cette position commune coïncide avec la position de mesure du champ B_0 .

On rappelle qu'il n'est pas nécessaire que la vitesse soit uniforme.

• Zone de champ nul :

Le champ magnétique à la position de départ de la bobine d'amont doit avoir une composante verticale B_y telle que :

$$|B_y(z)| \leq 0.6\mu\text{T} \quad \text{à } z \simeq z_1 - \frac{L_D}{2} \quad (3.12)$$

Comme nous mesurons également l'intégrale de référence sur le trajet de retour, cette spécification s'applique aussi à la position d'arrivée de la bobine d'aval ($z \simeq z_2 + \frac{L_D}{2}$). Il faudra donc écranter le champ terrestre dans ces deux régions.

• Dipôle :

La figure [3.4] représente la trajectoire nominale du faisceau par rapport aux surfaces pôlaires des aimants de l'arc. Dans le modèle simple d'un aimant de 3m sans champ de fuite, la trajectoire du faisceau occupe une plage en x de 28mm (Flèche F).

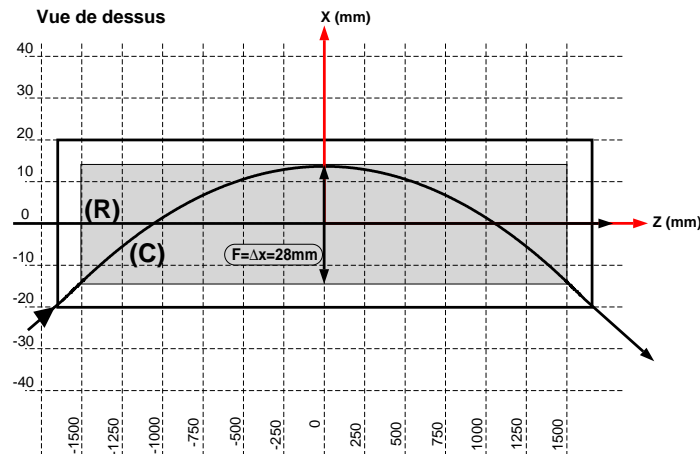


Figure 3.4 - La zone grise est zone “utile” au faisceau dans l’aimant ($\Delta z = 3000\text{mm}$, $\Delta x = 28\text{mm}$), c’est-à-dire la zone utilisée pour la définition du positionnement de l’aimant. Le rectangle noir représente les limites du tracé de trajectoires par le programme “Snake”[22].

Les aimants de l’arc ont été alignés de telle sorte que cette flèche idéale soit centrée

en x par rapport à la surface polaire (figure [3.4]).

L'axe (R), sur la figure [3.4], est à la fois le milieu de la largeur du pôle et de la flèche idéale du faisceau dans l'aimant. C'est sur cet axe que nous convenons de définir l'intégrale rectiligne des aimants. C'est donc le long de cet axe que le mesureur intégrera le champ du dipôle de référence. La tolérance est de 0.1mm.

La relation entre l'intégrale curviligne (sur C) et l'intégrale rectiligne (sur R) sera détaillée dans le paragraphe 3.2.6.

3.2.3 Description mécanique du mesureur

La figure [3.5] représente une vue axonométrique du mesureur destiné à mesurer l'intégrale de champ du dipôle de référence.

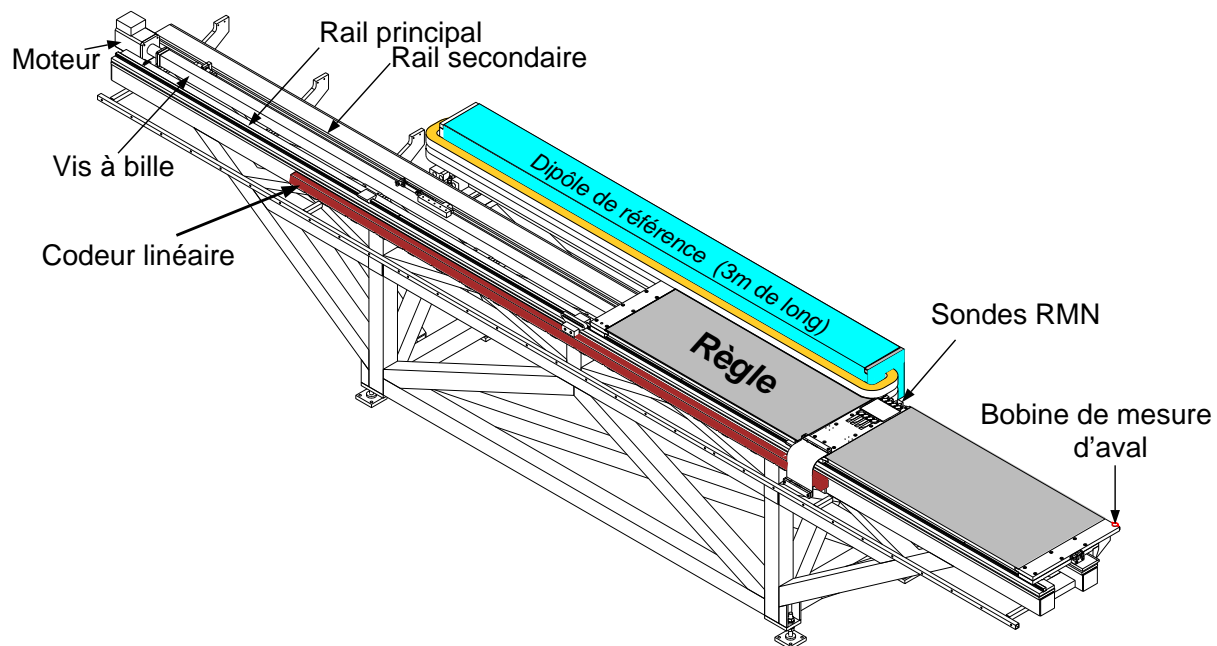


Figure 3.5 - *Vue axonométrique du mesureur. Pour la clarté du dessin, les blindages magnétiques ne sont pas représentés.*

• Equipage mobile :

Compte tenu des spécifications, nous avons adopté la solution d'un équipage mobile en forme de plaque (règle) portant les deux bobines à ses extrémités et les sondes RMN¹ au centre. Cette règle (figure [3.6]) est composée d'un sandwich (verre-époxy, nid d'abeille) et de trois pièces usinées en verre-époxy massif. Sur les deux pièces extrêmes sont fixées les bobines. Leur fixation a été conçue de façon à assurer un repositionnement précis en cas de démontage. Sur la pièce centrale sont installées les quatre sondes RMN. La règle

1. RMN : Résonance Magnétique Nucléaire.

est portée par six chariots de guidage : deux sous chacun des trois inserts.

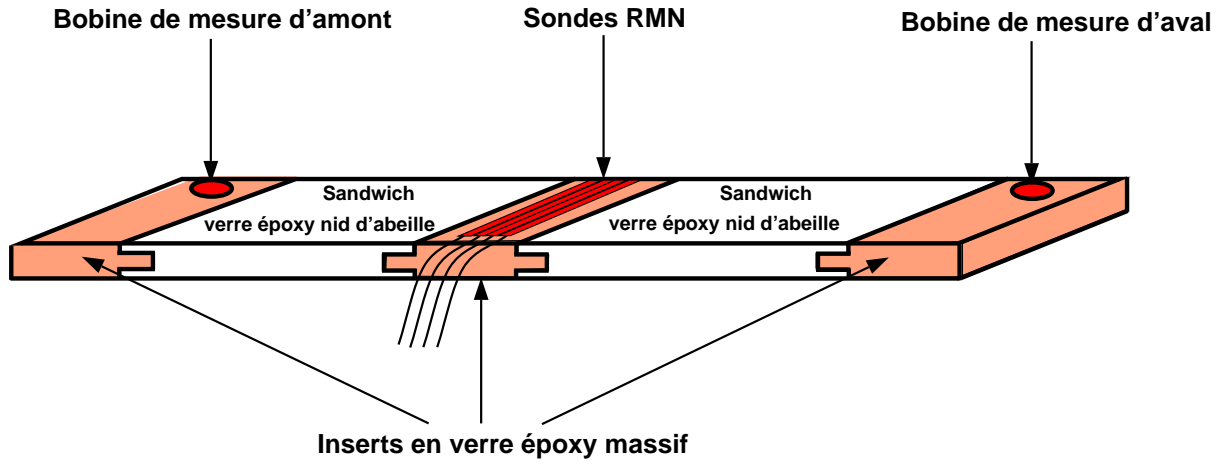


Figure 3.6 - Vue de la règle comportant les deux bobines de mesures et les sondes RMN.

→ Mesure de la distance entre les centres géométriques des deux bobines :

La distance entre les centres géométriques des deux bobines (L_G) a été mesurée par une équipe de l'Aérospatiale aux Mureaux à l'aide d'un appareil de contrôle tridimensionnel. Cet appareil de mesure a été calibré par un étalon en Invar (alliage fer-Nickel) de 3000.006mm de long, lui-même mesuré par interférométrie laser et fourni par le LNE². Une des propriétés de l'invar est de présenter un coefficient de dilatation thermique nul.

Nous avons effectué des mesures à différentes températures entre 21 °C et 35.5 °C. Pour mesurer la température de la règle, nous avons noyé quatre sondes au platine³ dans le sandwich. Soit \bar{T} la moyenne de ces quatre températures. Sur cet intervalle de 14.5°, nous avons mesuré un coefficient de dilatation thermique global de la règle :

$$C_T = (16.5 \pm 1) 10^{-6} (^\circ\text{C})^{-1} \quad (3.13)$$

A 21 °C, la distance (L_G) mesurée entre les centres des deux bobines est de (3039.635 ± 0.02) mm. Par la suite, nous adoptons pour cette distance :

$$L_{G[m]} = (3039.635 \pm 0.02) [1 + C_T (\bar{T}_{[^\circ\text{C}]} - 21.)] \quad (3.14)$$

• Support :

Nous avons fait réaliser un support en tube d'acier inoxydable soudé. Cette pièce a subi un traitement thermique pour la stabiliser. Cette mécanique supporte à la fois le dipôle de référence, les deux rails de guidage et le système de motorisation de la règle, ainsi qu'un codeur linéaire.

2. LNE : Laboratoire National d'Essais.

3. Sonde au platine de classe A (à 0 °C, la précision absolue est de ± 0.15 °C).

• Rails de guidage :

Les deux rails mesurent 6.5m de long. Le rail le plus éloigné de l'aimant, appelé rail principal, assure la rectitude du mouvement de translation. Il a été aligné en x et y avec une précision de 0.1mm par la méthode du fil tendu :

- un fil fin est tendu entre les deux extrémité du rail,
- un microscope équipé d'un réticule gradué est placé sur un support temporaire reposant sur les six chariots mobiles pour contrôler la rectitude du rail sur toute la longueur de celui-ci.

Le deuxième, appelé rail secondaire, a pour rôle de fixer l'angle de roulis de l'équipage mobile autour de l'axe de translation. Il a été réglé pour respecter la tolérance de $\pm 0.5\text{mm}$ de rectitude du déplacement des bobines dans le plan vertical.

Pour minimiser les perturbations introduites par notre mesureur sur le champ du dipôle, le rail principal (nécessairement en acier) a été placé le plus loin de l'aimant. Le rail secondaire, plus proche de l'aimant, a été réalisé en acier inoxydable. Les autres pièces, situées à petite distance de l'aimant, sont soit en matériaux composites (règle) soit en alliage d'aluminium (pièces de liaison rails-chariots). Ce choix a été justifié par un calcul magnétostatique (code calcul Poisson 2D) qui confirme que du fait de la petite dimension de l'entrefer, un objet massif en fer placé à environ 15cm de l'aimant ne perturbe pas le champ central du dipôle, cf. figure [3.7].

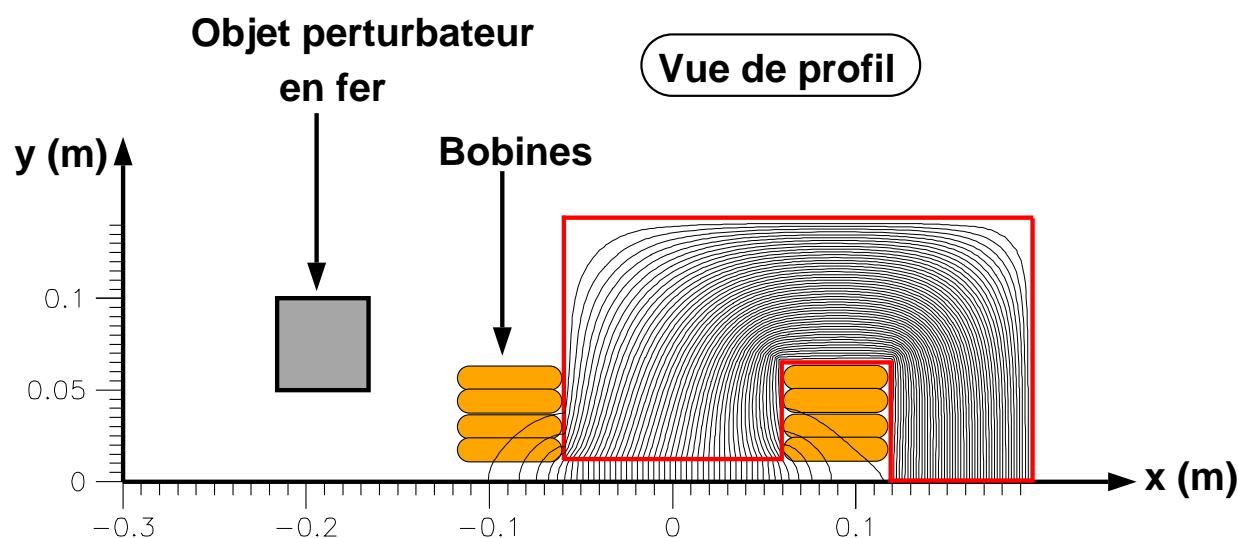


Figure 3.7 - *Evaluation en 2D par "Poisson" des perturbations apportées par la proximité de nos éléments mécaniques (rails, support et chariots) au champ central de l'aimant alimenté sous 300A. Le rectangle de gauche correspond à l'élément perturbateur en fer. La présence de cet élément en fer induit des modifications du champ central inférieures à 10^{-5} en relatif. On note que seule la moitié haute du dipôle est représentée.*

• Motorisation :

La transmission est assurée par une vis à bille réalisée par la société INA. Cette vis à bille est capable de déplacer notre règle à une grande vitesse (0.6m/s) sur une course de 3.4m. Cette vis est entraînée par un moteur sans balai (“brushless”). Les parasites électromagnétiques d’un tel moteur sont réduits par rapport aux autres types de moteurs. L’électronique associée à ce moteur sera décrite ultérieurement.

● Codeur :

La position en z de l’équipage mobile est mesurée par un codeur linéaire magnétique incrémental avec index dont la course est de 3.4m. Ce codeur à ruban magnétique, réalisé par la société Heidenhain, est du même type que ceux qui équipent les machine-outils. La résolution de ce codeur est de $2.5\mu\text{m}$ et sa précision absolue de 0.1mm.

● Dipôle de référence :

Le dipôle de référence est relié au support par l’intermédiaire de deux chariots à bille de précision à commande manuelle. Ces chariots permettent d’ajuster la position en x et l’angle de lacet de l’aimant de telle sorte que la trajectoire des bobines relativement aux pôles corresponde à l’axe (R) (figure [3.4]). De plus, on dispose de trois vis de réglage pour ajuster l’altitude du dipôle par rapport à l’axe de translation des bobines. Ces vis permettent également de fixer les angles de roulis et de tangage de l’aimant par rapport à l’horizontale.

● Blindages :

Rappelons que la composante verticale du champ magnétique doit être annulée aux positions de départ de la bobine d’amont et d’arrivée de la bobine d’aval, c’est-à-dire à une distance d’environ 1.5m des extrémités de l’aimant. D’autre part, le champ de fuite du dipôle atteint des valeurs de l’ordre de celle du champ terrestre (0.5Gauss) à partir d’une distance de 20cm des faces de l’aimant. Nous décidons donc d’annuler le champ dans toute la région située entre 200 et 1500mm des extrémités du dipôle, et ce de chaque côté de celui-ci. En conséquence, ce que nous appelons intégrale de champ du dipôle de référence correspond en fait à l’intégrale de $z = -1700\text{mm}$ à $z = +1700\text{mm}$ alors que le trajet effectivement parcouru par l’ensemble des deux bobines durant l’intégration s’étend de $z = -3000\text{mm}$ à $z = +3000\text{mm}$, cf. figure [3.8].

Ce blindage nous permet donc d’une part d’annuler le champ aux deux extrémités et d’autre part de minimiser le champ parasite intégré. Cette annulation du champ est obtenue par deux blindages en forme de C (figures [3.8] et [3.9]). Leur dessin a été optimisé à l’aide du programme “Poisson”. Ils sont constitués de deux couches de mumétal de 1mm d’épaisseur. Une vue en coupe du profil de la moitié supérieure du blindage est représenté sur la figure [3.9]. On note que ces blindages ne sont pas représentés sur la figure [3.5].

Les prédictions du programme “Poisson” avec cette géométrie sont $B_y(z) < 0.5\mu\text{T}$ pour un champ magnétique extérieur appliqué de 5Gauss. Nous avons vérifié cette annulation du champ avec un microteslamètre. Les résultats figurent dans le tableau (3.4). L’accord est bon avec l’estimation de Poisson pour la région centrale des blindages, et ces

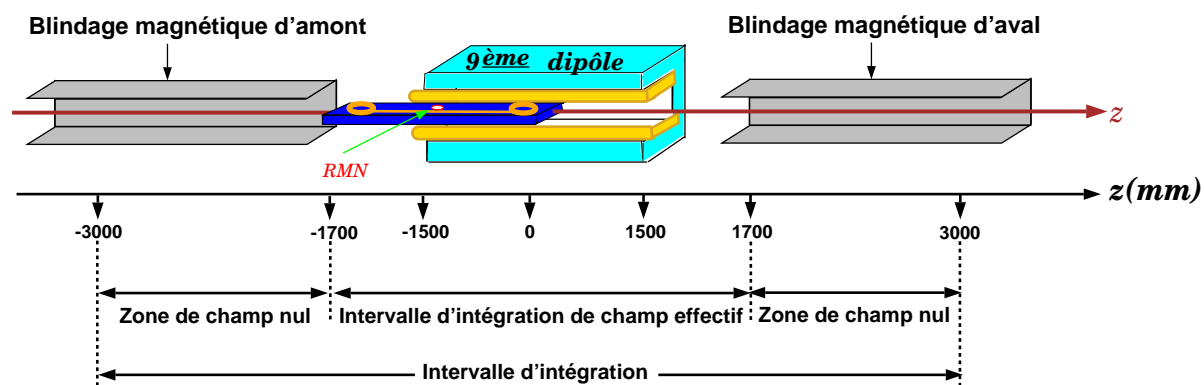


Figure 3.8 - Description de la mesure de l'intégrale absolue de champ du dipôle de référence.

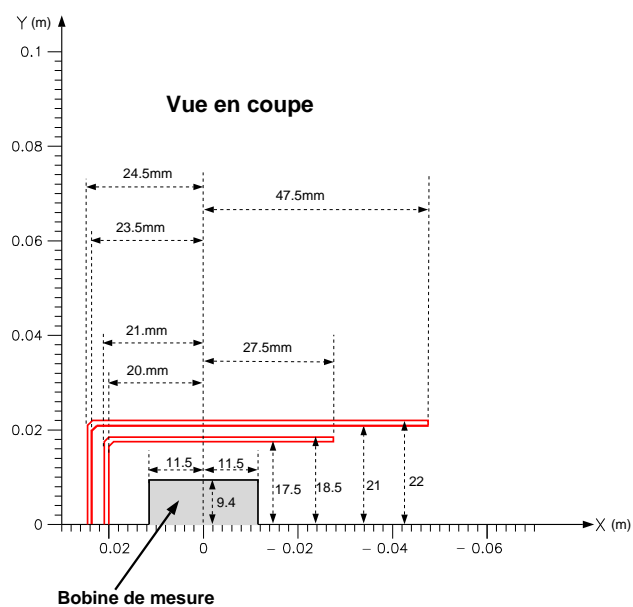


Figure 3.9 - Vue en coupe du profil (moitié supérieure) de mumétal utilisé comme blindage magnétique.

résultats satisfont en particulier la spécification $|B_y(z)| \leq 0.6\mu\text{T}$ à $|z| \simeq 3000\text{mm}$ (cf. cahier des charges 3.2.2).

Position $ z (\text{mm})$	1600	1700	1750	[1800, 3100]	3200	3280
Champ mesuré (μT)	95	≤ 20	≤ 0.8	≤ 0.6	≤ 0.9	≤ 8

Tableau 3.4 - *Mesures de la composante verticale du champ magnétique de $|z| = 1600\text{mm}$ à $|z| = 3280\text{mm}$. Lors de ces mesures, le dipôle n'était pas alimenté. On rappelle que le blindage magnétique s'étend de $|z| = 1710\text{mm}$ à $|z| = 3310\text{mm}$. C'est la valeur absolue de la position que nous avons portée. Comme en général les mesures dans les blindages de part et d'autre du dipôle sont différentes, nous n'avons retenu que la plus grande, en valeur absolue, de ces deux mesures.*

3.2.4 Description électronique

Les standards adoptés pour l'électronique et le contrôle-commande sont tout à fait identiques à ceux décrits dans le chapitre 2 pour les profileurs (VME, EPICS). L'électronique et le contrôle-commande du mesureur ont été réalisés par le Service d'Instrumentation Générale du DAPNIA. Nous n'en donnerons ici qu'une description succincte.

• Voltmètre intégrateur :

La mesure de l'intégrale temporelle de la formule (3.3) est réalisée par un voltmètre intégrateur de précision (Precision Digital Integrator / PDI 5035 Metrolab). Cet appareil dispose en entrée d'un amplificateur à gain programmable dans la gamme $\times 1$ à $\times 1000$ pour fournir des tensions dans la gamme $[-5\text{V}, 5\text{V}]$ à l'étage suivant : le VFC (Voltage Frequency Converter). Il interprète les informations provenant du codeur et mesure les intégrales partielles de la tension aux bornes des bobines pour des intervalles de temps correspondant au passage de l'équipage mobile par une série de positions prédéterminées. Nous avons choisi de réaliser une intégrale partielle tous les millimètres le long de la course de 3039mm. Les résultats de cette intégration figurent en mémoire du PDI et sont lus après la mesure par le système de contrôle-commande puis transférés dans un fichier pour être traités ultérieurement en vue de réaliser la seconde intégration sur l'espace de la formule (3.3). Les données que le voltmètre met à notre disposition pour chaque intégrale partielle sont :

- position de l'équipage mobile à la fin de l'intégrale partielle en unité propre du codeur $\pm 2.5\mu\text{m}$,
- valeur de l'intégrale partielle en unité de 10^{-8} V.s ,
- date de l'intégrale partielle en unité de l'horloge interne de l'appareil.

Le “driver EPICS” associé au PDI a été réalisé par le groupe informatique du Service d'Instrumentation Générale du DAPNIA.

• Sondes RMN:

Les sondes RMN servent à mesurer localement et précisément le champ magnétique. Leur principe repose sur la mesure de la fréquence de précession des spins de noyaux d'hydrogène plongés dans un champ magnétique homogène. Sous l'effet de ce champ, les moments magnétiques des noyaux d'hydrogène précessent autour de la direction du champ avec une fréquence proportionnelle au champ magnétique. Le coefficient de proportionnalité correspondant à l'échantillon que nous utilisons (eau dopée au NiSO_4) est de $(42.57608 \pm 12 \cdot 10^{-5})\text{MHz/T}^4$. On souligne que ce système ne fonctionne bien que lorsque le champ est homogène. La précision relative de la mesure absolue du champ est de quelques 10^{-6} . Pour pouvoir mesurer le champ central quelle que soit l'énergie du faisceau entre 0.5GeV et 6GeV, nous disposons de quatre sondes RMN dont les plages de fonctionnement figurent dans le tableau [3.5]. Les sondes sont reliées à l'électronique par l'intermédiaire d'un multiplexeur. L'électronique est reliée au microprocesseur du VME par l'intermédiaire d'une liaison RS232. Le "driver EPICS" de cette liaison a été développé à l'observatoire W.M. Keck [29], Hawaii, USA.

Sonde	Champ minimum (T)	Champ maximum (T)
1	0.0430	0.1356
2	0.0784	0.2710
3	0.1590	0.5470
4	0.3000	1.0500

Tableau 3.5 - *Plages de fonctionnement des quatre sondes RMN que nous utilisons.*

• Moteur:

Le moteur de type "brushless", réalisé par la société Baldor, est contrôlé par deux boucles d'asservissement :

- une boucle d'asservissement en vitesse tirant ses informations d'un codeur angulaire appelé "resolver" situé dans le boîtier moteur.
- une boucle d'asservissement en position tirant ses informations du codeur linéaire déjà exploité par le PDI.

Cette logique est réalisée par un module VME (carte PMAC⁵ fabriquée par la société Delta Tau Data Systems, Californie) qui commande la carte de puissance du moteur tout en gérant les informations provenant des butées de fin de course. L'électronique de puissance assure l'alimentation du moteur. On note que le "driver EPICS" associé à la carte PMAC a été développé au laboratoire d'Argonne. Pour le déplacement de l'équipage mobile, nous avons adopté le profil de vitesse illustré sur la figure [3.10].

4. La valeur de ce coefficient pour un proton libre est de $42.57747(2)\text{MHz/T}$ (Particles Data Group, 1994). La faible différence avec notre valeur provient d'un effet de milieu caractéristique de l'eau.

5. PMAC : Programmable Multi Axis Controller.

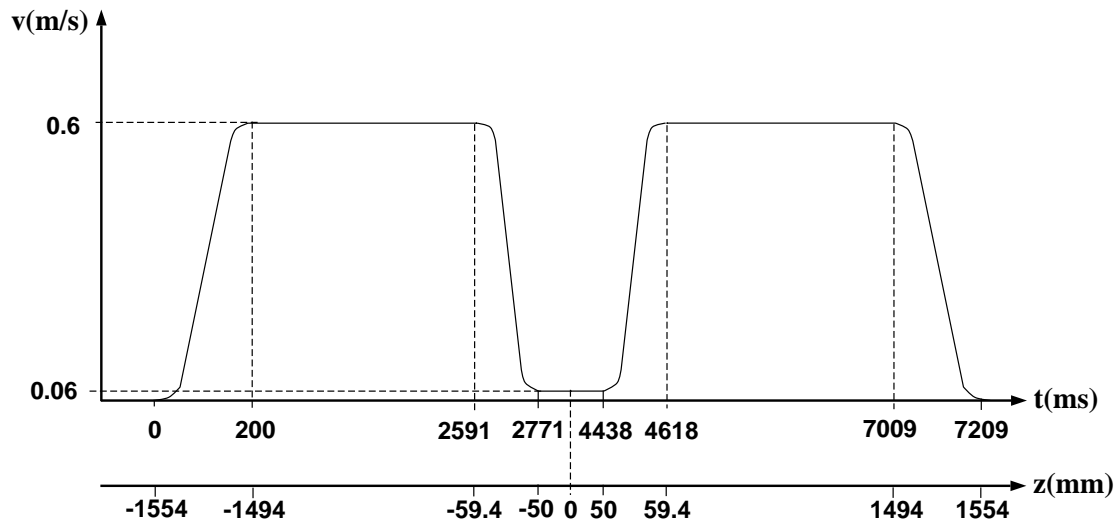


Figure 3.10 - *Profil de vitesse adopté. z correspond à la position du milieu M des deux bobines de mesures. Lorsque M est situé à $z=0$, chacune des deux bobines est à l'aplomb des faces de fer de l'aimant.*

Ce profil présente successivement :

- une plage d'accélération ($\Delta t=200\text{ms}$, $\Delta z=60\text{mm}$),
- un plateau à grande vitesse ($v=0.6\text{m/s}$, $\Delta t=2391\text{ms}$, $\Delta z=1434.6\text{mm}$),
- une plage de décélération ($\Delta t=180\text{ms}$, $\Delta z=59.4\text{mm}$),
- un plateau à basse vitesse ($v=0.06\text{m/s}$) correspondant à l'entrée/sortie des bobines de l'aimant ($\Delta t=1667\text{ms}$, $\Delta z=100\text{mm}$),
- une plage d'accélération ($\Delta t=180\text{ms}$, $\Delta z=59.4\text{mm}$),
- un plateau à grande vitesse ($v=0.6\text{m/s}$, $\Delta t=2391\text{ms}$, $\Delta z=1434.6\text{mm}$),
- une plage de décélération ($\Delta t=200\text{ms}$, $\Delta z=60\text{mm}$).

Ce profil a été optimisé pour réduire la durée de la mesure dans le but de minimiser l'erreur induite par une variation éventuelle du niveau parasite de l'intégrateur ("offset"). La vitesse est réduite dans la zone où un signal important à l'entrée de l'intégrateur risquerait de provoquer la saturation de ce dernier.

• Autres fonctions :

En plus des fonctionnalités décrites ci-dessus, notre contrôle-commande assure la mesure des quatre températures au niveau de la règle et la mesure de l'intensité d'alimentation de l'aimant via une pince ampèremétrique qui entoure l'un des câbles d'alimentation du dipôle de référence. Le contrôle-commande utilise l'information donnée par la pince ampèremétrique pour sélectionner la sonde RMN et le gain d'amplification du PDI. Les

températures et la valeur du courant dans l'aimant sont lues sur le VME par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition ADAS ICV150 (cf. chapitre 2 page 155).

En plus de la mesure d'intégrale de champ rectiligne, notre appareil permet de réaliser une cartographie automatique de l'aimant :

- la région centrale est mesurée par la sonde RMN pour une série de valeurs de z prédéterminée.
- dans la zone de champ de fuite d'amont (resp. d'aval), le champ est mesuré par la bobine d'amont (resp. d'aval) acquise isolément au cours d'un déplacement rapide. Les valeurs du champ sont alors données tous les millimètres par le voltmètre intégrateur avec une précision relative de 10^{-3} .

Notons que deux opérations manuelles subsistent :

- changement de cavalier contrôlant la sélection des bobines,
- déplacement éventuel en x de l'aimant pour obtenir une carte de champ 2D (z, x).

Ces cartographies sont utilisées pour le calcul des corrections et la détermination des tolérances (cf. paragraphes 3.2.6 et 3.4).

3.2.5 Bobines de mesure

Le tableau (3.6) résume les caractéristiques des deux bobines de mesure. La figure [3.11] représente l'une de ces bobines. La bobine photographiée et schématisée sur la figure [3.11] est munie d'une petite bobine supplémentaire appelée bobine d'ajustement d'aire magnétique.

Mandrin :	Céramique d'alumine	
⌀ interne :	19.78mm	
Hauteur bobinée :	18.77mm	
Diamètre moyen de la bobine :	22mm	
Bobinage :	Fil de CuBe	
	⌀ du fil isolé :	0.11mm
	Nombre de couches :	16
	Nombre de tours par couche :	162
	Nombre total de tours :	2592
	Aire magnétique moyenne d'un tour :	$3.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
	Aire magnétique totale théorique :	0.94 m^2

Tableau 3.6 - *Caractéristiques des bobines de mesure.*

Nous avons pris un soin particulier à faire en sorte que chaque couche ait le même nombre de spires que les autres. La partie supérieure d'une bobine reçoit des picots de connexion et si nécessaire une bobine d'ajustement de l'aire magnétique (cf. paragraphes "contrôles"). Dans la partie inférieure, est ménagé un trou de 6mm de diamètre destiné

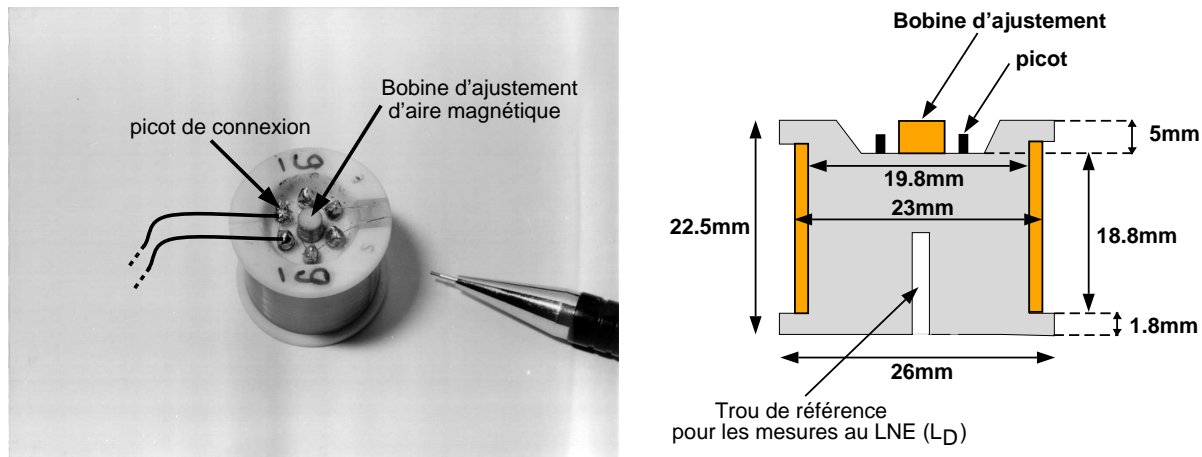


Figure 3.11 - Photographie d'une bobine de mesure munie d'une bobine d'ajustement.

à localiser le centre géométrique de la bobine lors des mesures de L_G à l'Aérospatiale. Notons que la hauteur des bobines est inférieure de 3mm à celle de l'entrefer.

Les bobines sont connectées en série et reliées au voltmètre par des paires torsadées de petite dimension (diamètre du câble isolé: 0.55mm). Un cavalier permet de relier au voltmètre les configurations suivantes :

- bobine A et bobine B en série : mesure intégrale,
- bobine A seule : mesure du champ de fuite d'amont (cartographie),
- bobine B seule : mesure du champ de fuite d'aval (cartographie),
- aucune bobine : mesure des parasites induits par les câbles de liaison situés en aval du cavalier (c'est-à-dire entre le cavalier et le voltmètre).

Contrôles :

Avant d'être fixée sur la règle, chacune des bobines a subi les contrôles suivants :

- ajustement des aires magnétiques à mieux que 10^{-4} près : procédure d'équilibrage dans le dipôle,
- mesure absolue des aires magnétiques à 10^{-3} près,
- détermination de la position du centre magnétique de chaque bobine par rapport au centre géométrique de son mandrin : procédure d'équilibrage dans le quadripôle.

Quatre bobines ont été ajustées et contrôlées dans le but de disposer de deux bobines de réserve. Les trois opérations ci-dessus ont nécessité la réalisation d'un appareil spécial appelé "équilibreur" (figure 3.12). Il se compose d'un équipage mobile entraîné en rotation par un moteur synchrone à 50 pôles (1Hz). L'équipage mobile porte les deux bobines montées en série tête-bêche de sorte que leur vecteurs surface soient opposés et perpendiculaires à l'axe de rotation. De plus, le centre géométrique de chaque bobine est

situé sur l'axe de rotation. Une série de contacts tournants assure le passage de la tension des bobines à l'appareil de mesure. Une troisième bobine, solidaire de l'équipage mobile, est composée de deux bobinages indépendants qui peuvent être connectés en série ou en opposition. Ces bobinages permettent de synchroniser le déclenchement de l'acquisition aussi bien dans un champ dipolaire (cas de la connexion en série) que quadripolaire (cas de la connexion en opposition). L'acquisition est réalisée par un amplificateur à détection synchrone digital (ADS)⁶ capable de mesurer l'amplitude et la phase d'une seule composante de Fourier du signal, et ce avec une excellente capacité de réjection du bruit parasite et des autres composantes de Fourier.

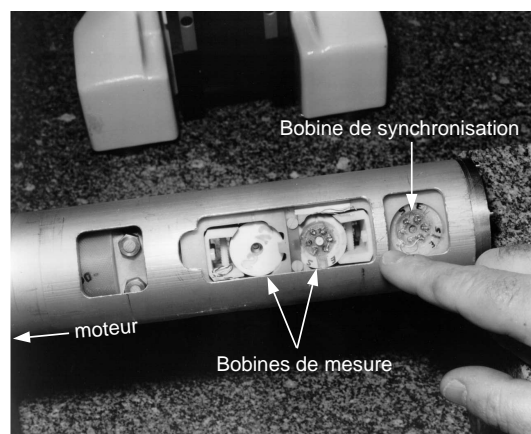


Figure 3.12 - Photographie de la partie de l'équilibreur recevant les deux bobines de mesure montées tête-bêche et la bobine de synchronisation.

3.2.5.1 Equilibrage dans le dipôle

Nous avons utilisé un dipôle de champ très homogène au CERN dont l'entrefer était de 70mm. Après une cartographie RMN, nous avons déterminé une région dans laquelle l'homogénéité du champ était meilleure que 10^{-6} T/cm. Nous avons placé nos bobines dans cette région tandis que le moteur était à l'extérieur de l'aimant. Les bobines étant en opposition et connectées en série, cette installation nous fournit une mesure précise, par une "méthode de zéro", de la différence des aires magnétiques des deux bobines. Pour ajuster les aires magnétiques des deux bobines, on utilise de petites bobines d'ajustement dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau (3.7). Le nombre de spires de la bobine auxiliaire est ajusté manuellement de manière à annuler la différence d'aire magnétique mesurée.

Les résultats que nous avons obtenus à partir d'un jeu de 4 bobines figurent dans le tableau (3.8).

6. Stanford Research SR 850.

Mandrin :	Polyéthylène	
∅ interne :	4mm	
Hauteur bobinée :	5mm	
Diamètre moyen de la bobine :	5.2mm	
Bobinage :	Fil de Cuivre	
	∅ du fil isolé :	0.11mm
	Nombre de couches :	1 à 4
	Nombre maximum de tours par couche :	40
	Nombre de tours initial :	20 à 150
	Aire magnétique moyenne d'un tour :	$1.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$

Tableau 3.7 - *Caractéristiques des bobines d'ajustement.*

(N° Bobine, N)	(N° Bobine, N)	$ \Delta\mathcal{A} (10^{-5} \text{ m}^2)$
(N° 7, N=0)	(N° 9, N=103)	< 1.2
(N° 7, N=0)	(N° 10, N=34)	< 1.5
(N° 7, N=0)	(N° 8, N=36)	< 1.2
(N° 10, N=34)	(N° 8, N=36)	< 1.4
(N° 8, N=36)	(N° 9, N=103)	< 1.7

Tableau 3.8 - *Ajustement des aires magnétiques d'un couple de bobines. N est le nombre de spires sur la bobine d'ajustement.*

3.2.5.2 Mesure absolue de l'aire magnétique d'une bobine

Dans le dispositif précédent, nous avons remplacé le moteur synchrone par un moteur pas à pas capable de faire effectuer à l'équipage mobile une rotation de 180° avec une précision d'un milliradian. Nous n'utilisons pas la bobine de synchronisation. Nous mesurons successivement l'aire magnétique d'une bobine puis de l'autre. Le signal recueilli aux bornes d'une bobine est envoyé sur un voltmètre intégrateur utilisé en mesureur de flux magnétique. La manipulation consiste à faire tourner l'équilibre contenant la bobine dans le champ homogène de l'aimant :

- La position de départ est celle pour laquelle le vecteur surface de la bobine considérée a la même direction que le champ magnétique. On détecte cette position par tâtonnement sachant qu'elle correspond à un minimum pour la valeur affichée du voltmètre intégrateur.
- A partir de cette position de départ, on fait tourner l'équipage mobile de 180° . La valeur affichée par le voltmètre intégrateur correspond cette fois à un maximum ($\cos(\widehat{\vec{S}, \vec{B}}) = -1$).
- On effectue une mesure identique sur le demi-tour de retour. Ceci a pour effet d'annuler au premier ordre la dérive du voltmètre (tension d' "offset") dans la moyenne \overline{Vt} des résultats d'aller et de retour.

L'aire magnétique de la bobine est reliée à cette moyenne \overline{Vt} par :

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{Vt}}{2B} \quad \text{avec} \quad \overline{Vt} = \int_{t(0)}^{t(\pi)} e dt \quad (3.15)$$

Le champ magnétique B , dans la région de la bobine, est mesuré lors de la cartographie. Une sonde RMN, située en un point fixe de l'entrefer contrôle la dérive du champ dans l'aimant. Notons que les aires magnétiques des bobines ont été mesurées à une température de 21°C. L'incertitude relative sur l'aire magnétique mesurée est inférieure ou égale à $1 \cdot 10^{-3}$. Avec cette précision, la différence d'aire magnétique entre les quatre bobines dont nous disposons est imperceptible. On trouve $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} = 0.9340 \text{ m}^2$.

3.2.5.3 Equilibrage dans le quadripôle

Le but de ces mesures est de déterminer le décalage transverse ρ entre le centre géométrique du mandrin et le centre magnétique des bobines (figure [3.13]). A l'issue de la mesure, nous placerons les deux bobines sur la règle de telle sorte que ces décalages soient dirigés selon l'axe de translation de la règle comme représenté sur la figure [3.13].

En référence à la figure [3.13], la longueur entre les centres magnétiques des bobines sur

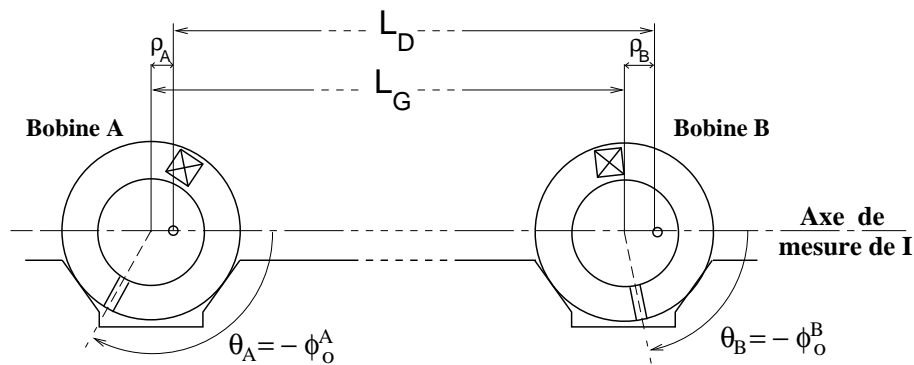


Figure 3.13 - Disposition des bobines sur la règle de mesure de l'intégrale de champ du dipôle de référence.

la règle s'écrit :

$$L_D = L_G - \rho_A + \rho_B \quad (3.16)$$

avec ρ_A et ρ_B les décalages respectifs des bobines A et B.

Notre objectif est de connaître ρ_A et ρ_B à $10\mu\text{m}$ près. Dans ce but, nous réutilisons l'équilibreur mais effectuons les mesures dans un quadripôle disponible à Saclay.

Comme pour l'équilibrage dans le dipôle, les bobines sont montées dans l'équilibreur et la rotation s'effectue grâce au moteur synchrone. Lors de la rotation d'une bobine dans un quadripôle à la fréquence F , plusieurs signaux en tension indépendants sont recueillis aux bornes de la bobine :

- un signal de fréquence F qui ne dépend que de la distance r : décalage entre l'axe de rotation et l'axe du quadripôle. Pour être sensible à ce signal, la synchronisation de

l'amplificateur à détection synchrone est réalisée par un compte-tours type compteur de bicyclette. En jouant sur des vis micrométriques permettant l'ajustement de l'altitude et de la position transverse du quadripôle, on fait coïncider l'axe de rotation du moteur avec l'axe du quadripôle. Ceci est réalisé à $30\mu\text{m}$ près avec une reproductibilité de $5\mu\text{m}$ lors des changements de bobine.

- un signal de fréquence $2F$ relié au décalage transverse qui nous intéresse. Pour isoler ce signal, on utilise la bobine de synchronisation qui fournit un signal de fréquence $2F$ servant de référence à la l'ADS (par rapport aux mesures d'équilibrage dans le dipôle, les deux bobines constituant la bobine de synchronisation ont été mises en opposition).
- théoriquement, un signal de fréquence $3F$ dû au fait que le quadripôle n'est pas parfaitement homogène et qu'il contient une faible composante sextupolaire. Pratiquement, le rapport hauteur/diamètre de la bobine a été choisi pour minimiser (idéalement annuler) ce signal.

Pour n'être sensible qu'au signal de fréquence de $2F$, nous utilisons la bobine de synchronisation comme référence pour l'amplificateur à détection synchrone capable de rejeter les harmoniques voisins. La méthode consiste à effectuer une série de mesures pour différentes orientations de chaque bobine dans son logement dans l'équilibreur (tous les 45°). Soit θ l'angle entre un axe fixe transverse à l'axe de révolution (\mathcal{R}) de la bobine (\vec{OA}) sur la figure [3.14]) et l'axe (\vec{OB}) défini par (\mathcal{R}) et la rainure de la bobine (figure [3.14]). Si l'on porte l'amplitude du décalage transverse ρ en fonction de l'angle θ de la bobine dans son logement, on observe une sinusoïde. L'amplitude de cette sinusoïde correspond au module du décalage ρ , sa phase ϕ à l'orientation de ce décalage dans le plan transverse à l'axe \mathcal{R} de la bobine. $\phi = \theta - \phi_0$ avec ϕ_0 l'angle entre (\vec{OB}) et (\vec{OG}), G : centre magnétique de la bobine (figure [3.14]). La figure [3.15] présente les résultats obtenus pour les bobines 7 et 8 ainsi qu'un ajustement de la forme :

$$y = A + \rho \cos(\theta - \phi_0) \quad (3.17)$$

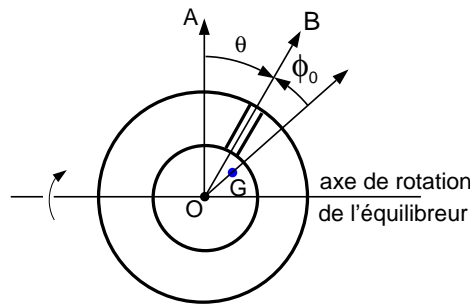


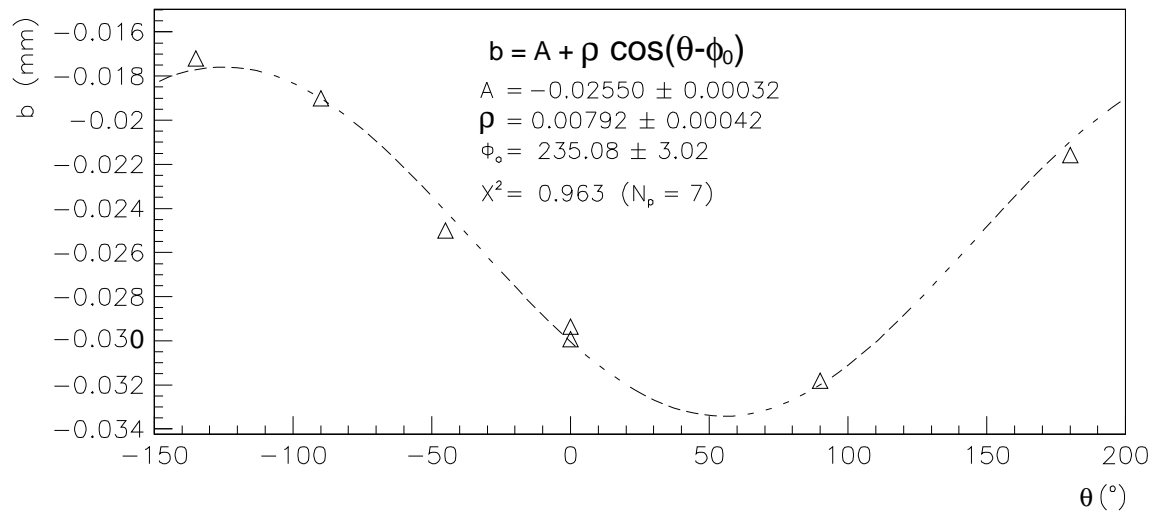
Figure 3.14 - Définitions de θ et ϕ_0 . G représente le centre magnétique de la bobine.

Pour les quatre bobines, on trouve :

L'incertitude sur ρ est de $\pm 2\mu\text{m}$. On note que nous avons effectué des mesures correspondant à toutes les combinaisons de positionnement possible de deux bobines.

Pour obtenir la configuration représentée sur la figure [3.13], il suffit de disposer les bobines sur la règle de telle sorte que $\theta = -\phi_0$ (cf. figure [3.14]).

Bobine 7



Bobine 8

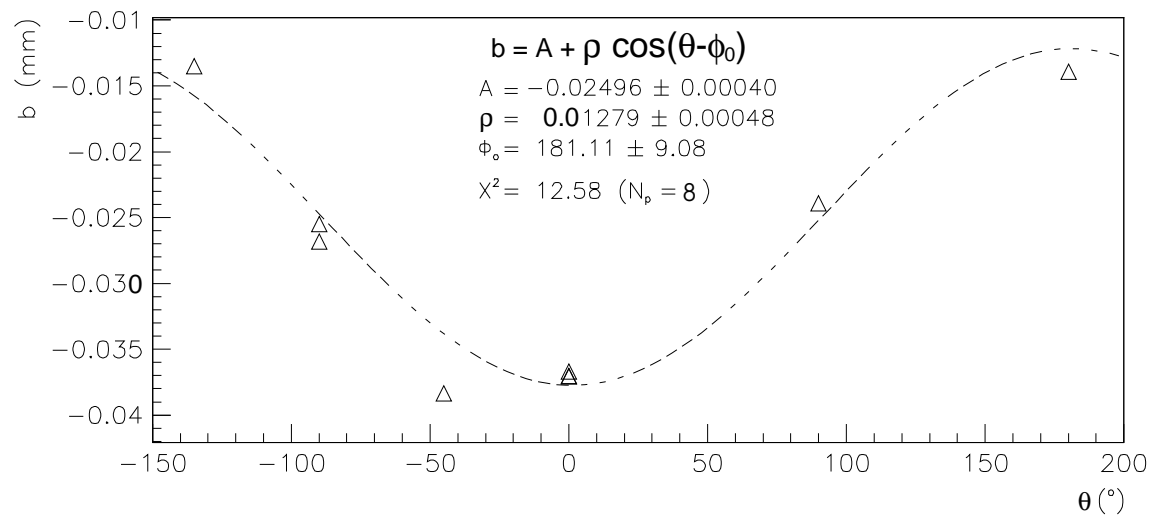


Figure 3.15 - Résultats obtenus lors de l'équilibrage dans le quadripôle.

N ^o Bobine	ρ (μm)
N ^o 7	7.9
N ^o 8	12.8
N ^o 9	1.4
N ^o 10	3.6

Tableau 3.9 - *Décalages transverses des bobines observés lors de l'équilibrage dans le quadripôle.*

3.2.5.4 Différence entre les aires magnétiques des deux bobines et correction de la tension d' "offset"

Les données fournies par le voltmètre intégrateur (intégrales simples temporelles d'aller et de retour) nous permettent d'accéder à la différence d'aire magnétique entre les deux bobines et à la dérive du voltmètre intégrateur.

Considérons ces deux défauts présents simultanément à l'exclusion de tout autre :

1. Soit $\overline{\mathcal{A}}$ l'aire magnétique moyenne des bobines A et B : $\overline{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{A}_A + \mathcal{A}_B}{2}$ avec \mathcal{A}_A (resp. \mathcal{A}_B) l'aire magnétique de la bobine A (resp. B). $\overline{\mathcal{A}}$ est supposée connue sans erreur. Soit $\Delta\mathcal{A} = \mathcal{A}_A - \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}} - \mathcal{A}_B \neq 0$ l'écart entre l'aire magnétique de chaque bobine et l'aire magnétique moyenne.
2. Un niveau continu parasite ΔV s'ajoute au signal V' des deux bobines en série : $V' = V_A + V_B + \Delta V$. C'est l'erreur d' "offset" ou de dérive de l'intégrateur. ΔV prend principalement sa source dans les tensions de thermocouple créées le long du circuit reliant les bobines à l'intégrateur en cas de différence de température entre deux éléments d'une paire de soudures ou de contacts.

En utilisant les notations du paragraphe 3.2.1.2 et en tenant compte des défauts $\Delta\mathcal{A}$ et ΔV , calculons les intégrales simples sur le temps de la tension aux bornes des deux bobines pour les trajets d'aller (I_{T_A}) et de retour (I_{T_R}). Nous trouvons :

$$I_{T_A} = \frac{1}{\overline{\mathcal{A}}} \int_{t(z_1, aller)}^{t(z_2, aller)} -V' dt = 2 B_0 \frac{\Delta\mathcal{A}}{\overline{\mathcal{A}}} - \frac{\Delta V \Delta t_A}{\overline{\mathcal{A}}} \quad (3.18)$$

$$I_{T_R} = \frac{1}{\overline{\mathcal{A}}} \int_{t(z_2, retour)}^{t(z_1, retour)} -V' dt = -2 B_0 \frac{\Delta\mathcal{A}}{\overline{\mathcal{A}}} - \frac{\Delta V \Delta t_R}{\overline{\mathcal{A}}} \quad (3.19)$$

où $\Delta t_A = \Delta t_R = \Delta t$ sont les durées (égales) des trajets d'aller et de retour.

A partir des équations (3.18) et (3.19), nous voyons que les défauts $\Delta\mathcal{A}$ et ΔV peuvent être déterminés à partir des données, en faisant la différence et la somme des intégrales simples sur le temps :

$$\Delta\mathcal{A} = \left(\frac{I_{T_A} - I_{T_R}}{4 B_0} \right) \overline{\mathcal{A}} \quad (3.20)$$

$$\Delta V = - \left(\frac{I_{T_A} + I_{T_R}}{2 \Delta t} \right) \overline{\mathcal{A}} \quad (3.21)$$

Les défauts $\Delta\mathcal{A}$ et ΔV donnent donc lieu à des corrections et non pas à des erreurs.

- Correction d' "offset" ΔV :

Cette correction est effectuée par un algorithme de traitement des données (intégrales partielles $(VT)_i$) du voltmètre intégrateur :

$$(VT)_i^{\text{corrigé}} = (VT)_i^{\text{non corrigé}} - \Delta V(t_i - t_{i-1}) \quad (3.22)$$

où $i \in [2, \text{nombre de déclenchements}]$ et ΔV est le résultat de la formule (3.21).

- Correction de la différence d'aire magnétique $\Delta\mathcal{A}$:

Le calcul de \mathcal{I} en présence du défaut $\Delta\mathcal{A}$ conduit à la relation :

$$\mathcal{I}^{\text{corrigé}} = \frac{\mathcal{I}_{\text{aller}}^{\text{non corrigé}} - \mathcal{I}_{\text{retour}}^{\text{non corrigé}}}{2} - \frac{\Delta\mathcal{A}}{\mathcal{A}} DI \quad (3.23)$$

où $\Delta\mathcal{A}$ est le résultat de la formule (3.20). DI reflète la différence des intégrales "couvertes" par chacune des deux bobines :

$$DI = \int_{-\infty}^{z_{\text{réf}}} B(z) dz - \int_{z_{\text{réf}}}^{+\infty} B(z) dz \quad (3.24)$$

que l'on approxime par $DI \simeq 2B_0 z_{\text{réf}}$. Notons le signe "-" dans la moyenne des intégrales aller et retour (formule 3.23) : du fait du changement de signe de "dz", ces deux quantités ont des signes opposés.

Ces deux corrections seront prises en compte dans le programme d'analyse des données.

3.2.6 Correction d'intégrale courbe

Dans cette partie, on se réfère à la figure [3.4].

L'intégrale dont nous avons besoin dans la formule donnant l'énergie (formule 1.16 page 142) est l'intégrale de champ le long du trajet réel du faisceau (courbe C de la figure [3.4]). L'intégrale que donne le mesureur, de même que les mesures relatives permettant de relier l'intégrale de l'aimant de référence aux intégrales de chacun des huit aimants de l'arc sont mesurées sur l'axe (R) de la figure [3.4]. Un facteur correctif global C_c doit donc être appliqué aux intégrales rectilignes. Pour calculer C_c , nous avons établi une carte 2D de champ magnétique du dipôle de référence dans le plan (z, x) , puis procédé au calcul de l'intégrale courbe par tracé de trajectoire dans cette distribution de champ. La cartographie a été faite par sondes RMN au centre et sonde de Hall dans les champs de fuite. On a mesuré le champ pour quatre valeurs de x : -20, -10, 0 et +10mm. Le tracé de trajectoire a été fait par le programme "Snake" qui réalise une interpolation au deuxième degré dans

la carte de champ et intègre l'équation du mouvement⁷ par une méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre. Ce programme est décrit dans la thèse de G. Quémener [22]. Le pas d'intégration est d'un millimètre.

Deux résultats sont sortis de cette simulation :

- le facteur de correction C_c entre l'intégrale rectiligne et l'intégrale courbe :

$$C_c = \frac{I_C - I_R}{I_R} = \begin{cases} +1.61 \cdot 10^{-4} \text{ à } 90\text{A} \\ +1.32 \cdot 10^{-4} \text{ à } 300\text{A} \end{cases} \quad (3.26)$$

- le gradient effectif dans le dipôle selon x :

$$G_x = \frac{1}{I_C} \frac{\partial I_C}{\partial x} = \begin{cases} 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1} \text{ à } 90\text{A} \\ 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1} \text{ à } 300\text{A} \end{cases} \quad (3.27)$$

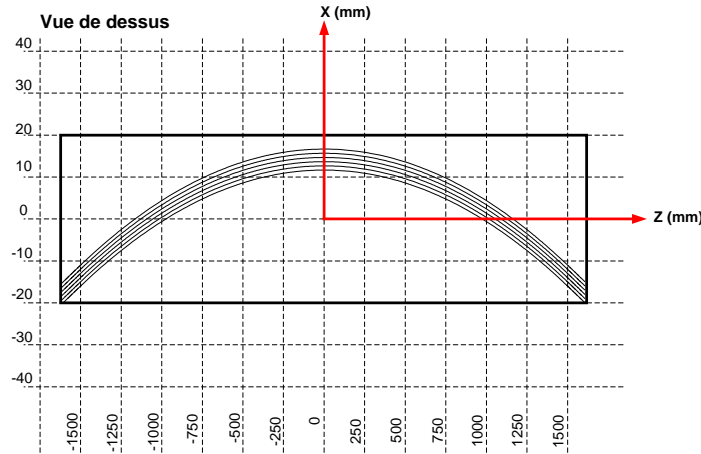


Figure 3.16 - *Tracé de trajectoire à $p_e = 7.02905 \text{ GeV}/c$ dans la carte du dipôle de référence mesurée à 300A pour l'étude du gradient selon x du champ intégral. Les cinq trajectoires représentées correspondent à des électrons injectés avec une translation dans la direction des x : -2, -1, 0, +1 et +2mm par rapport à la trajectoire nominale. L'angle de déviation total de la trajectoire centrale est $\frac{34.3}{8}^\circ$. Les quatre autres trajectoires ont des angles de déviation légèrement différents. Ces différences permettent de calculer le gradient de l'aimant : $\frac{1}{I_C} \frac{\partial I_C}{\partial x} = 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$ à 300A. Cette étude est faite dans le plan médian de l'aimant ($y=0$).*

Nous ferons l'hypothèse que ces valeurs (C_c et G_x) mesurées sur le dipôle de référence sont aussi valables pour chacun des aimants de l'arc.

7. Equation du mouvement :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{-|e|c}{|\vec{p}|c} \frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.25)$$

avec s : abscisse curviligne, \vec{r} : rayon vecteur de la particule de charge $-|e|$ et d'impulsion \vec{p} .

3.3 Mesure de l'intégrale relative de champ

Il s'agit de relier l'intégrale rectiligne de chacun des huit dipôles de l'arc à celle du dipôle de référence. Ceci est réalisé grâce à un appareil (le "Dipole Stand") conçu par CEBAF et ayant servi à la calibration de tous les dipôles de l'accélérateur en 1992. Le principe et les performances de cet appareil sont publiés dans la référence [23]. D'autres détails figurent dans les rapports internes de Jefferson Lab. [24], [25] et [26].

Pour notre part, nous nous contenterons de présenter le principe simplifié illustré sur la figure [3.17].

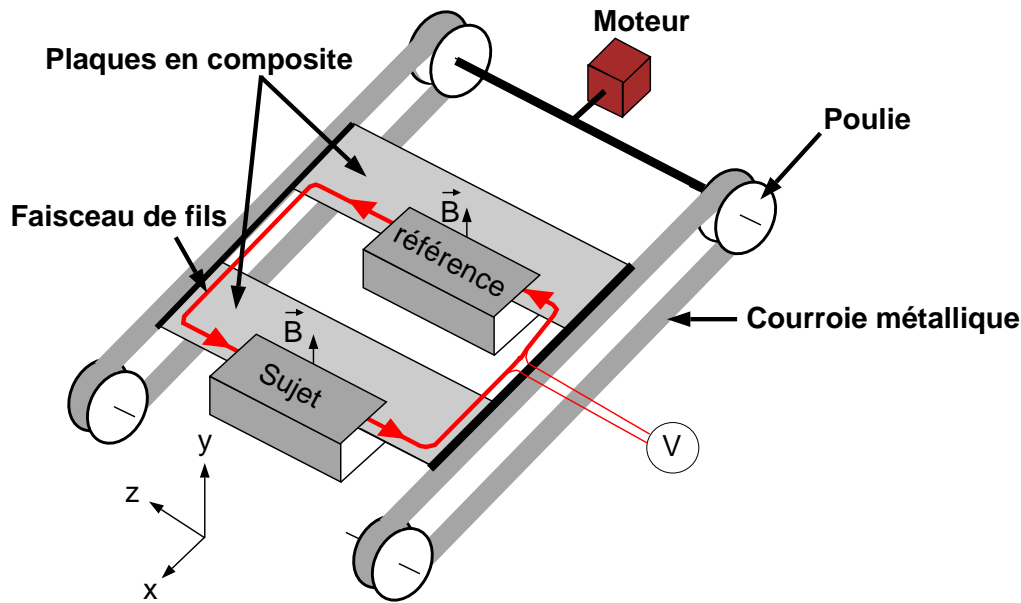


Figure 3.17 - Schéma de principe du "Dipole Stand". Un moteur pas à pas entraîne par l'intermédiaire d'un système de quatre poulies et de deux courroies métalliques un ensemble de deux plaques composites de 3.5m de long et de 30cm de large. Animées d'un même mouvement de translation, ces deux plaques pénètrent simultanément dans l'entrefer de deux dipôles alimentés en série : un dipôle de référence et un dipôle sujet. Les plaques portent à leur extrémité un faisceau de 50 fils connectés entre eux de telle sorte que l'ensemble constitue une unique bobine de 50 spires reliée à un voltmètre intégrateur. Les champs magnétiques des deux aimants sont parallèles entre eux et verticaux.

Si les aimants produisent le même champ magnétique et que la distance séparant les deux aimants est rigoureusement égale à la distance séparant les deux faisceaux constituant la bobine, le signal recueilli est nul. Dans la réalité, l'identité des distributions de champ n'est pas réalisée rigoureusement et le signal recueilli par le voltmètre est relié de manière simple à la différence des intégrales de champ des deux aimants :

$$I_{\text{sujet}} - I_{\text{référence}} = \frac{-1}{N(x_1 - x_2)} \int_{t(x_1)}^{t(x_2)} V(t) dt \quad (3.28)$$

avec :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} B_y(z) dz.$$

$V(t)$: tension recueillie,

N : nombre de spires,

x : coordonnée du bobinage dans le repère lié à l'aimant sujet (cf. figure [3.4]),

l'intervalle $[x_1, x_2]$ représente le “plateau” sur lequel nous moyennons la différence d'intégrale de champ.

Soit \bar{x} le milieu de l'intervalle $[x_1, x_2]$ que l'on ajuste au centre de l'entrefer ($\bar{x}=0$). La largeur du plateau ($x_2 - x_1$) vaut 30mm.

Il s'agit comme dans le cas de notre mesureur d'une “méthode de zéro” mais le résultat concerne ici la différence de l'intégrale de champ de deux aimants et non l'intégrale absolue d'un aimant individuel.

Les mesures de 1992 étaient destinées à la réception et à la sélection des aimants de l'accélérateur. Elles satisfont dans leur principe les besoins du projet ARC du point de vue de l'intégrale relative.

Soit :

- $I_{\text{réf}}$: l'intégrale de champ de l'aimant de référence installé à demeure sur le “dipole stand”,
- I_i : l'intégrale de champ d'un aimant sujet i ($i \in 1,8$: dipôle de l'arc),
- I_9 : l'intégrale de champ de notre dipôle de référence lui-aussi en position sujet.

Le “Dipole Stand” mesure successivement à différents courants (30, 90, 150, 210, 300A) :

$$\rightarrow (I_i - I_{\text{réf}}), i \in 1,8$$

$$\rightarrow (I_9 - I_{\text{réf}})$$

Nous pouvons alors calculer $(I_9 - I_i)$ par la relation :

$$(I_9 - I_i) = (I_9 - I_{\text{réf}}) - (I_i - I_{\text{réf}}) \quad (3.29)$$

L'intégrale de champ rectiligne des huit aimants de l'arc s'écrit alors :

$$\int B(z) dz = 8 I_9 - \sum_{i=1}^8 (I_9 - I_i) \quad (3.30)$$

Le premier terme (I_9) de (3.30) est l'intégrale absolue de champ du 9^{ème} dipôle (notre aimant de référence) donnée par notre mesureur. Le deuxième terme est la somme des différences entre les intégrales de chacun des aimants de l'arc et l'intégrale de champ du

9^{ème} dipôle. Pour fixer les idées, la différence entre les intégrales de champ de deux aimants BA alimentés en série est de l'ordre de 10^{-3} .

Néanmoins, ces mesures souffrent de deux limitations en ce qui concerne leur utilisation dans le projet ARC :

- le 9^{ème} dipôle n'a jamais été mesuré sur le “Dipole Stand” car il n'a été construit qu'en 1996 pour notre projet,
- la dispersion des résultats, lorsqu'on répète la mesure pour un même aimant sujet, est de l'ordre de $\frac{\Delta I}{I_i} \simeq 4 \cdot 10^{-4}$.

Une nouvelle analyse des données en 1996 nous a permis de corriger certaines imperfections de l'analyse de sorte que le défaut de dispersion a été ramené à $2.8 \cdot 10^{-4}$. A la suite de cette analyse, une nouvelle campagne de mesures utilisant une procédure plus soignée pour l'alignement des dipôles a montré une reproductibilité de 10^{-4} . Il a donc été décidé de remesurer les huit aimants de l'arc ainsi que le 9^{ème} sur le “Dipole Stand” en juillet 1998.

Un travail de recherche des erreurs systématiques est actuellement (mars 1998) en cours à Jefferson Lab. dans le but de préparer la prochaine campagne de mesures. Notre objectif est d'obtenir une dispersion des mesures inférieure à $1.4 \cdot 10^{-4}$ pour le même aimant sujet mesuré plusieurs fois après démontage et remontage.

3.4 Précisions

Dans le même esprit que ce qui a été fait pour les précisions sur la mesure de l'angle de déviation, nous détaillerons chacune des contributions d'erreur à la mesure d'intégrale de champ et rassemblerons les résultats des calculs dans des tableaux en fin de section.

3.4.1 Bilan des incertitudes sur la mesure de l'intégrale de référence

L'axe de translation de la règle joue le rôle d'axe de roulis (figure [2.17], page 178). L'origine de notre repère est au centre de l'entrefer de l'aimant (figure [3.4]). Il n'y aura donc par définition pas de décalage de l'aimant de référence en x , y , z , seulement des décalages des bobines. Pour les erreurs faisant intervenir l'homogénéité du champ central, nous utiliserons les données de cartographie à 300A et 90A car les mesures de champ sont de meilleure qualité que celles à plus bas courant (30A) où la sonde RMN “décroche”.

3.4.1.1 Dipôle de référence

• Roulis de l'aimant de référence :

Un défaut ρ de positionnement de l'aimant de référence en roulis a pour effet d'écarter la direction du champ magnétique de la direction verticale. La mesure étant sensible à la seule composante verticale du champ, l'erreur induite est en $\cos(\rho)$:

$$\frac{\Delta I}{I} \simeq -\frac{\rho^2}{2} \quad (3.31)$$

La mise à niveau des surfaces polaires est réalisée à l'aide d'un niveau à bulle d'air de sorte que $|\rho| < 1\text{mrad}$.

• Tangage de l'aimant de référence :

De la même manière, si l'on omet les champs de fuite et les défauts d'homogénéité de l'aimant, un tangage τ induit un facteur $\cos(\tau)$ sur la composante mesurée. En outre, il induit un facteur $1/\cos(\tau)$ sur la longueur d'intégration de sorte qu'au total il n'y a pas d'effet. La simulation dans la carte de champ 2D mesurée à 300A donne cependant un effet du second ordre en τ :

$$\frac{\Delta I}{I} = 16 \tau^2 \quad (3.32)$$

C'est cette valeur que nous retiendrons pour le calcul de l'erreur. Notons que la mise à niveau des surfaces polaires nous assure $|\tau| < 0.3\text{mrad}$.

• Lacet de l'aimant de référence :

D'après nos conventions, l'angle de lacet λ est l'angle formé dans le plan horizontal entre l'axe médian de la surface polaire et l'axe de translation du mesureur. A l'aide de mires collées sur la règle du mesureur, d'un outillage spécial d'alignement fixé sur l'aimant et de visées au théodolite, nous pouvons garantir $|\lambda| < 0.1\text{mrad}$. Dans un modèle idéalisé de l'aimant, l'erreur induite par λ proviendrait de l'augmentation de la longueur d'intégration d'un facteur $1/\cos(\lambda)$. La simulation dans la carte de champ mesurée confirme l'absence de terme du premier ordre et donne, pour le second ordre, un coefficient supérieur à celui de l'aimant idéalisé :

$$\frac{\Delta I}{I} = 24 \lambda^2 \quad (3.33)$$

C'est cette valeur que nous retiendrons.

• Température de l'aimant de référence :

Il s'agit ici de l'effet d'une différence de température $\Delta\mathcal{T}$ entre la température du fer de l'aimant de référence et la température moyenne des 8 aimants de l'arc. Les bobines de ces 9 aimants sont refroidies par le même circuit d'eau et la température du "dipole shed" est asservie à celle du tunnel de l'arc à $\pm 2^\circ\text{C}$ près. Nous prévoyons donc $\Delta\mathcal{T} \leq 2^\circ\text{C}$. En cas de changement de température, le fer subit une dilatation thermique relative de coefficient K dans les trois directions de l'espace :

$$K = 1 + C_{T_{fer}} \Delta\mathcal{T} \quad \text{avec} \quad C_{T_{fer}} = 1.2 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C} \quad (3.34)$$

En particulier, la hauteur de l'entrefer est multipliée par K . Donc, si nous négligeons les effets de saturation, le champ central est divisé par K à courant fixé. Dans le même temps, la longueur du fer, qui gouverne la longueur magnétique, est elle aussi multipliée par K . Au total, l'intégrale de champ doit être en première approximation insensible à la température.

L'effet dominant ne sera pas dû à la température moyenne du fer, mais au gradient de température qui s'installe à l'intérieur du fer (le coeur de l'aimant est chauffé par la bobine tandis que sa surface est refroidie par l'air ambiant). L'effet qui en résulte est une augmentation de la hauteur de l'entrefer proportionnelle au gradient moyen : le "C" de l'aimant est plus ouvert en présence d'un gradient qu'à l'équilibre thermique. La mesure de l'influence de la température ambiante sur l'intégrale de champ est difficile à réaliser. Néanmoins, un ordre de grandeur de cet effet peut être déduit d'une mesure effectuée sur le "Dipole Stand" [23] où la température de la surface extérieure du fer a été augmentée par un système de chauffage. Notons que cette mesure inclut, outre les effets de gradient thermique, les effets éventuels de variation de susceptibilité magnétique du fer et de la dilatation des bobines. Cette mesure a conduit au résultat suivant :

$$\left| \frac{\Delta I}{I} \right| < 10^{-6} \Delta \mathcal{T}_{[^\circ C]} \quad (3.35)$$

que nous adoptons pour le calcul d'erreur.

3.4.1.2 Incertitudes liées aux bobines

• Roulis, tangage, position en x et température des bobines :

Soit :

ρ_A, ρ_B les angles de roulis des bobines A et B,

τ_A, τ_B les angles de tangage des bobines A et B,

x_A, x_B les positions en x des bobines A et B dans l'aimant (cf. figure [3.4]),

$\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B$ les températures des bobines A et B.

Nous supposons ces grandeurs constantes lors des trajets d'aller et de retour. Les quatre sources d'erreur évoquées ici contribuent :

- en différentiel à l'écart $\Delta \mathcal{A}$ entre l'aire magnétique des deux bobines, défini dans la section 3.2.5.4. Leur effet est donc corrigé en même temps que celui de $\Delta \mathcal{A}$, ce que nous traduisons en remplaçant $\Delta \mathcal{A}$ par sa valeur effective $\Delta \mathcal{A}^*$ dans la formule (3.23) :

$$\Delta \mathcal{A}^* = \Delta \mathcal{A} + \overline{\mathcal{A}} \left[-\frac{\tau_A^2}{4} + \frac{\tau_B^2}{4} - \frac{\rho_A^2}{4} + \frac{\rho_B^2}{4} + \frac{x_A - x_B}{2} G_x + C_{T_{\text{Bobine}}} (\mathcal{T}_A - \mathcal{T}_B) \right] \quad (3.36)$$

où $\Delta \mathcal{A}$ est l'écart "propre" d'aire magnétique des bobines, $C_{T_{\text{Bobine}}} (\simeq C_{T_{\text{Alumine}}} = 6.5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C})$ représente le coefficient de dilatation thermique linéaire des bobines et G_x est le gradient de champ effectif de l'aimant selon x (cf. paragraphe 3.2.6 : $G_x(90\text{A}) = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{mm}^{-1}$).

- en valeur moyenne à l'incertitude $\Delta \overline{\mathcal{A}}$ sur l'aire moyenne des bobines discutée dans le paragraphe suivant et qui prend la valeur effective :

$$\Delta \overline{\mathcal{A}}^* = \Delta \overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{A}} \left[-\frac{\rho_A^2}{4} - \frac{\rho_B^2}{4} - \frac{\tau_A^2}{4} - \frac{\tau_B^2}{4} + \frac{x_A + x_B}{2} G_x + 2 C_{T_{\text{Bobine}}} \left(\frac{\mathcal{T}_A + \mathcal{T}_B}{2} - \mathcal{T}_0 \right) \right] \quad (3.37)$$

où $\mathcal{T}_0=21^\circ\text{C}$ est la température à laquelle ont été mesurées les aires magnétiques \mathcal{A}_A et \mathcal{A}_B .

► Erreur induite par l'incertitude effective $\Delta\overline{\mathcal{A}}^*$ sur l'aire magnétique moyenne des bobines :

Cette erreur se reporte sur l'intégrale de champ I avec un facteur de réduction $\frac{L_D-L_0}{L_D}$ de l'ordre de (5/3000) du fait de la méthode de zéro employée (cf. paragraphe 3.2.1.2) :

$$\frac{\Delta I}{I} = \left(\frac{L_D - L_0}{L_D} \right) \frac{\Delta\overline{\mathcal{A}}^*}{\overline{\mathcal{A}}} \quad (3.38)$$

L_D représente la distance entre les centres magnétiques des deux bobines et L_0 la longueur magnétique du dipôle de référence.

D'après notre cahier des charges, et en accord avec les divers contrôles que nous avons effectués sur le mesureur, nous adoptons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta\overline{\mathcal{A}}}{\overline{\mathcal{A}}} \right| &< 1.10^{-4}, \\ |\rho_{A/B}| &< 4\text{mrad}, \\ |\tau_{A/B}| &< 4\text{mrad}, \\ \left| \frac{x_A+x_B}{2} \right| &< 0.1\text{mm}, \\ \left| \frac{\mathcal{T}_A+\mathcal{T}_B}{2} - \mathcal{T}_0 \right| &< 10^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Notons que l'acquisition individuelle de chaque bobine nous fournit une mesure directe de \mathcal{A}_A^* et \mathcal{A}_B^* avec une précision comparable à celle obtenue dans le dipôle du CERN pour \mathcal{A}_A et \mathcal{A}_B . Ces mesures seront faites à titre de contrôle lors de la mise en service du mesureur.

• Erreur de position en y des bobines :

D'après le modèle idéalisé de champ, la contribution d'une telle erreur devrait être nulle à tous les ordres mais la simulation dans la carte de champ 2D à 300A donne :

$$\frac{\Delta I}{I} = -10^{-5} (\Delta y_{[\text{mm}]})^2 \quad (3.39)$$

Nous avons ici $|\Delta y| < 0.5\text{mm}$.

• Erreur sur la distance entre les centres magnétiques des bobines L_D :

L'intégrale I étant proportionnelle à L_D , c'est une erreur du premier ordre. On a (cf. paragraphe 3.2.5.3) :

$$L_D = L_G - \rho_A + \rho_B \quad (3.40)$$

où L_G est la distance entre les centres géométriques des bobines et $\rho_{A/B}$ est ici la valeur algébrique de l'écart (centre géométrique-centre magnétique) des bobines A ou B, projeté sur l'axe des z (cf. paragraphe 3.2.5.3).

– erreur due à l'incertitude sur L_G :

Pour une température moyenne \mathcal{T} de la règle, on a :

$$L_G = (L_{G_0} + \Delta L_{G_0}) \{1 + (C_T + \Delta C_T)[\mathcal{T}_{[^\circ\text{C}]} + \delta\mathcal{T}_{[^\circ\text{C}]} - 21.]\} \quad (3.41)$$

où :

$L_{G_0} = 3039.623\text{mm}$: mesure à l'Aérospatiale à 21°C ,

$\Delta L_{G_0} < 0.02\text{mm}$: incertitude sur L_{G_0} à 21°C ,

$C_T = 16.5 \cdot 10^{-6} (^\circ\text{C})^{-1}$: coefficient de dilatation thermique de la règle mesuré à l'Aérospatiale,

$|\Delta C_T| < 10^{-6} (^\circ\text{C})^{-1}$: incertitude sur C_T ,

$|\delta\mathcal{T}| < 0.5^\circ\text{C}$: incertitude sur la mesure de \mathcal{T} .

Le calcul d'erreur conduit à :

$$\left| \frac{\Delta L_G}{L_G} \right| < \frac{\Delta L_{G_0}}{L_{G_0}} + C_T \delta\mathcal{T} + \Delta C_T \Delta\mathcal{T} \quad (3.42)$$

où $\Delta\mathcal{T} = 5^\circ\text{C}$ est l'écart maximum acceptable de température de la règle par rapport à 21°C .

– erreur due à l'incertitude sur ρ_A et ρ_B :

On souligne qu'ici ρ_A et ρ_B ne correspondent pas au roulis mais au décalage entre le centre géométrique du mandrin et le centre magnétique des bobines A et B (cf. paragraphe 3.2.5.3 : “Equilibrage dans le quadripôle”). Pour le calcul, nous adoptons $|\Delta\rho_{A/B}| < 3\mu\text{m}$. Cette valeur tient compte à la fois de la dispersion des mesures de $\rho_{A/B}$ dans le quadripôle et des incertitudes de positionnement des bobines dans leurs logements observées sur l'équilibreur (mesures dans le quadripôle) et sur la règle (mesures à l'Aérospatiale).

3.4.1.3 Erreur de mesure de B_0

L'intégrale de champ I étant proportionnelle à B_0 , l'erreur sur la mesure de B_0 est du premier ordre. On a :

$$\frac{\Delta I}{I} \simeq \frac{\Delta B_0}{B_0} \quad (3.43)$$

La précision absolue annoncée par le constructeur du système de mesure RMN est $\left| \frac{\Delta B_0}{B_0} \right| < 2 \cdot 10^{-6}$. Cependant, la stabilité annoncée du courant i délivré par l'alimentation électrique aux dipôles vaut $\left| \frac{\Delta i}{i} \right| = 10^{-5}$. C'est cette dernière valeur que nous adoptons. On souligne que la mesure RMN nous permet de vérifier facilement que cette stabilité est effectivement réalisée à court terme (durée d'une mesure d'énergie $\simeq 1\text{mn}$) et à long terme (durée entre deux mesures d'énergie $\leq 24\text{h}$).

• Erreur sur la position où B_0 est mesuré :

Idéalement, cette position de référence coïncide en x , y et z avec la position de départ de la bobine d'aval et la position d'arrivée de la bobine d'amont (cf. cahier des charges page 196). En pratique, cette coïncidence n'est pas parfaite et seule l'erreur de position Δx_{B_0} donne lieu à une incertitude :

$$\frac{\Delta B_0}{B_0} = \Delta x_{B_0} G_{x_{\text{central}}} \quad (3.44)$$

où $G_{x_{\text{central}}}$ est le gradient du champ dans la région centrale (en z) de l'aimant. A partir des cartographies, nous mesurons :

$$G_{x_{\text{central}}} = \begin{cases} 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1} & \text{à } 90\text{A} \\ 4 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1} & \text{à } 300\text{A} \end{cases} \quad (3.45)$$

Les quatre sondes RMN portent une croix matérialisant leur centre magnétique qui a été alignée sur le segment reliant les centres géométriques des deux bobines avec une précision de $\pm 0.1\text{mm}$. Nous prendrons cependant $|\Delta x_{B_0}| < 0.2\text{mm}$ pour tenir compte de l'incertitude sur la coïncidence en x entre le centre magnétique de la sonde et sa croix.

3.4.1.4 Erreurs dues au voltmètre intégrateur

Compte tenu du facteur de réduction (5/3000) dû à la méthode de zéro employée, nous estimons que les incertitudes dues à l'erreur de calibration du voltmètre et au bruit non corrélé au déplacement sont négligeables. Deux sources dominantes de bruit sont attendues :

- bruit électromagnétique capté par la bobine : ce bruit est atténué par la mise à la masse du support, de l'aimant et des deux blindages magnétiques ; au total, 93% du trajet des bobines bénéficie de cette protection.
- tensions thermocouples issues des soudures et des connexions situées sur le circuit des bobines et produisant une variation lente de la tension d' "offset". Ces éléments ont été conçus de manière à minimiser les gradients de température qu'ils auront à subir.

L'étude des bruits corrélés au déplacement fait partie des contrôles qui seront effectués sur le mesureur lors de sa mise en service. En particulier, des court-circuits soudés directement sur les picots de connexion des bobines permettront de mesurer l'effet sur la mesure de I des aires magnétiques parasites liées aux fils de connexion. Si nécessaire, cette mesure conduira à une correction. Nous supposons pour l'instant que la contribution de ces parasites à l'erreur de mesure de I est négligeable. Notons que toute saturation du niveau d'entrée du PDI ou de la valeur de l'intégrale partielle sera détectée et conduira au rejet de la mesure incriminée.

3.4.1.5 Erreurs dues au codeur

La résolution du codeur ($2.5\mu\text{m}$), sa précision sur les 3 mètres de déplacement (0.1mm) et le facteur de réduction des erreurs dû à la méthode de zéro employée rendent négligeable la contribution du codeur à l'erreur de mesure de l'intégrale de champ I . En cas de mauvais fonctionnement du codeur (perte d'au moins un pas de $2.5\mu\text{m}$), une erreur sera

détectée par le PDI grâce à deux index situés à chaque extrémité de la course du codeur et la mesure intégrale sera rejetée.

Calculons à titre d'exemple l'incertitude induite sur la mesure de l'intégrale de champ I par une différence ΔL entre L_D (distance entre les centres magnétiques des deux bobines) et L'_D (déplacement sur lequel est mesurée l'intégrale) :

$$\Delta L = L'_D - L_D \quad (3.46)$$

avec les notations de la section 3.2.1.2 et une origine des z fixée de sorte que $z_1 + \frac{L_D}{2} = 0$, on obtient :

$$\Delta \mathcal{I} = \int_0^{\Delta L} [B(z) - B_0] dz \quad (3.47)$$

$B_0 = B(z_{\text{réf}}) = B(0)$ et au premier ordre en z :

$$B(z) = B(0) (1 + z G_{z_{\text{central}}}) \quad (3.48)$$

avec $G_{z_{\text{central}}} = \frac{1}{B(0)} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{z=0}$ le gradient de champ relatif selon z dans la région centrale de l'aimant.

Compte tenu de la relation (3.7), l'intégration donne :

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta \mathcal{I}}{L_D B_0} = \frac{G_{z_{\text{central}}} (\Delta L)^2}{2 L_D} \quad (3.49)$$

D'après la cartographie de l'aimant de référence, on trouve pour $G_{z_{\text{central}}}$:

$$G_{z_{\text{central}}} = \begin{cases} 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1} & \text{à } 90\text{A} \\ 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1} & \text{à } 300\text{A} \end{cases} \quad (3.50)$$

Si pour ΔL nous adoptons 10mm, c'est-à-dire 100 fois la précision du codeur, nous trouvons :

$$\left| \frac{\Delta I}{I} \right| < 10^{-6} \quad (3.51)$$

Nous négligerons donc la contribution du codeur dans le bilan des erreurs.

3.4.2 Bilan des incertitudes sur la mesure de l'intégrale relative

Notre objectif est que le défaut de reproductibilité du “Dipole Stand” pour la somme quadratique des contributions des 8 dipôles de l'arc soit :

$$\frac{\Delta I}{I} < 0.5 \cdot 10^{-4} \quad (3.52)$$

soit un défaut de reproductibilité de $1.4 \cdot 10^{-4}$ pour un aimant.

Nous considérons que ce défaut de reproductibilité inclut les défauts suivants :

- erreurs de positionnement du dipôle “sujet” en x , y , z par rapport au “Dipole Stand”,

- erreurs d’orientation du dipôle “sujet” par rapport au “Dipole Stand” (roulis, tangage, lacet),
- erreur intrinsèque de reproductibilité du “Dipole Stand”, le dipôle sujet restant à la même position d’une mesure à l’autre.
- erreur intrinsèque de reproductibilité de l’intégrale de champ dans la comparaison de deux aimants.

3.4.3 Incertitudes liées au positionnement des aimants dans l’arc

Pour le positionnement des aimants relativement aux axes nominaux d’amont et d’aval (cf. chapitre 2), nous adoptons les tolérances annoncées par les géomètres de Jefferson Lab. [28] :

$$\begin{aligned} |\Delta x|, |\Delta y| &\leq 0.5\text{mm} & |\Delta z| &\leq 1\text{mm} \\ |\rho| &< 1\text{mrad} & |\tau| &< 1\text{mrad} & |\lambda| &< 1\text{mrad} \end{aligned}$$

Nous adoptons le système d’axes de la figure [3.18], c’est-à-dire que l’axe de roulis est ici aligné avec la trajectoire incidente du faisceau.

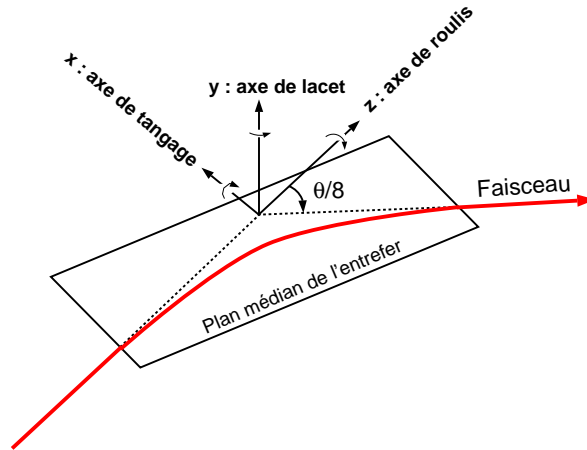


Figure 3.18 - Définition des axes de roulis, tangage et lacet pour le chapitre 3.

Cette trajectoire est supposée sans erreur (horizontale et orientée conformément à la figure [3.4]), c’est l’aimant qui est affecté de défauts d’alignement dans son implantation dans le tunnel. Nous nous intéressons à la composante horizontale de l’angle de déviation.

- Roulis d’un des aimants de l’arc :

Dans le cas d’un angle de roulis ρ , compte tenu de l’axe de roulis choisi ici (figure [3.18]) et de l’expression de la force de Lorentz, nous voyons que l’aimant et le faisceau sont entraînés “en bloc” par le roulis. La direction du faisceau émergent décrit un cône de demi-angle d’ouverture $\theta/8$ où θ est l’angle de déviation du faisceau dans l’arc. Le calcul de l’erreur induite sur la composante horizontale de l’angle de déviation est le même que

dans le cas du roulis de la paire de miroirs d'autocollimation (cf. tableau 2.10 page 185) où :

- le rôle du rayon lumineux est joué par le faisceau,
- le rôle du plan N est joué par le plan médian de l'entrefer,
- l'angle β est remplacé par $\theta/8$

Soit, pour un seul des huit dipôles de l'arc :

$$\Delta\theta = \rho^2 \frac{\sin(\theta/4)}{4} \quad \frac{\Delta\theta}{\theta} \xrightarrow{\theta/4 \ll 1 \text{ rad}} \frac{\rho^2}{16} \quad (3.53)$$

• Lacet d'un des aimants de l'arc :

En première approximation, l'aimant peut-être considéré à champ uniforme, à faces parallèles entre elles et traversé de manière symétrique par le faisceau. Dans le langage du programme "TRANSPORT", les indices du champ sont nuls et les deux faces de l'aimant sont tournées du même angle $\theta/16$, c'est-à-dire la moitié de l'angle de déviation du faisceau dans un aimant.

Par raison de symétrie, l'erreur induite par le lacet λ est du second ordre en λ . Le calcul de l'aimant idéalisé donne :

$$\Delta\theta = \frac{\lambda^2}{2} \{ \sin(\theta/8) - \tan(\theta/16) [\cos(\theta/8) - 1] \} \quad (3.54)$$

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} \xrightarrow{\theta/8 \ll 1 \text{ rad}} \frac{\lambda^2}{16} \quad (3.55)$$

Dans cette limite, $\theta/8 \ll 1 \text{ rad}$, nous trouvons que le seul effet du lacet est l'allongement de la trajectoire parcourue par le faisceau dans l'aimant.

Le tracé de trajectoire dans la carte de champ 2D de l'aimant réel, alimenté sous 300A, conduit au résultat :

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = 3.37 \lambda^2 \quad (3.56)$$

Ce calcul confirme qu'il n'y a pas de terme du premier ordre en λ : l'égalité des angles (faisceau - faces) à l'entrée et à la sortie de l'aimant est effectivement réalisée. Le coefficient du second ordre en λ , plus grand que celui calculé analytiquement, traduit les limites du champ idéalisé : les faces d'entrée et de sortie effectives de l'aimant ne sont pas rigoureusement parallèles entre elles, ce qui n'est pas surprenant pour un aimant en "C" et a déjà été noté à propos du gradient effectif de l'aimant G_x . En conséquence, nous adoptons le résultat du tracé de trajectoire pour le calcul de l'incertitude.

• Tangage d'un des aimants de l'arc :

Soit τ l'angle de tangage. Dans le modèle idéalisé précédent, la trajectoire du faisceau devient une hélice faisant l'angle τ , constant, avec le plan médian de l'aimant. Le calcul analytique comporte les étapes suivantes :

- en projection sur le plan médian, le rayon de courbure est multiplié par $\cos \tau$. On calcule l'intersection de cette hélice avec la face de sortie de l'aimant, d'où l'angle

de déviation :

$$\theta' = \frac{\theta}{8} + \tau^2 \tan(\theta/16) + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (3.57)$$

– cette nouvelle trajectoire de sortie est projetée sur le plan horizontal, ce qui conduit à :

$$\theta'' = \theta' - \frac{\tau^2}{2} \sin(\theta/4) \left[\frac{1}{\cos(\theta/4)} - \frac{1}{2} \right] + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (3.58)$$

Soit au total :

$$\Delta\theta = \theta'' - \frac{\theta}{8} = \tau^2 \left[\tan(\theta/16) - \frac{\sin(\theta/4)}{2} \left(\frac{1}{\cos(\theta/8)} - \frac{1}{2} \right) \right] + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (3.59)$$

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} \xrightarrow{\theta/4 \ll 1 \text{ rad}} \frac{\tau^2}{8} \left[\frac{\theta^2}{512} + \mathcal{O}(\theta^4) \right] + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (3.60)$$

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} \xrightarrow{\theta/4 \ll 1 \text{ rad}} 0.9 \cdot 10^{-4} \tau^2 \quad \text{avec} \quad \theta = 34.3^\circ \quad (3.61)$$

D'après le modèle idéalisé, l'erreur serait donc du deuxième ordre en τ et d'amplitude totalement négligeable pour des angles τ de l'ordre du milliradian. Nous avons de nouveau utilisé le tracé de trajectoire dans la carte 2D mesurée à 300A⁸. Le résultat est :

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = -2.0 \tau^2 \quad (3.62)$$

Le coefficient de τ^2 n'est plus négligeable. Ce calcul montre que le modèle idéalisé ne donne pas une estimation réaliste de cette erreur. Nous retiendrons pour l'effet du tangage le résultat du tracé de trajectoire.

- Translation selon x d'un des aimants de l'arc :

Nous nous plaçons dans le système d'axes de la figure [3.18]. L'effet de la translation selon x d'un des aimants de l'arc découle du calcul du gradient effectif du dipôle (formule 3.27) :

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{G_x \Delta x}{8} \quad (3.63)$$

Le facteur 8 provient du fait que $\Delta\theta$ est l'effet d'un seul dipôle sur l'angle de déviation θ des huit dipôles. Il s'agit de la seule contribution du premier ordre à l'erreur induite par le positionnement des aimants dans l'arc.

- Translation selon y d'un des aimants de l'arc :

Si l'aimant était un dipôle pur, c'est-à-dire que les composantes quadripolaires, sextupolaires, ... de son champ intégral étaient nulles, et dans la limite d'un angle de déviation

8. Dans ce calcul, la trajectoire sort du plan médian où la carte a été mesurée. Le programme "Snake" calcule alors le champ par une extrapolation utilisant un développement au deuxième ordre des équations de Maxwell.

nul, l'intégrale de champ (et donc l'angle de déviation) serait indépendante de la position relative verticale de l'aimant et du faisceau. Dans un aimant réel, le tracé de trajectoire utilisant la carte 2D mesurée à 300A nous donne une contribution du second ordre en Δy :

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = -\frac{1.0}{8} 10^{-5} (\Delta y_{[mm]})^2 \quad (3.64)$$

C'est cette valeur que nous adopterons dans la suite.

- Translation selon z d'un des aimants de l'arc :

Il est clair d'après la figure [3.18] que la contribution à l'angle de déviation d'une translation selon z d'un des aimants de l'arc est nulle à tous les ordres, et ceci justifie le choix du système d'axes adopté ici.

- Déviation du faisceau par rapport à sa trajectoire nominale :

Les calculs précédents concernaient un désalignement éventuel d'un des aimants de l'arc par rapport au trajet nominal du faisceau. Le faisceau réel peut également être décalé en angle ou en position par rapport à sa trajectoire nominale. Comme il est clair que seule la position relative du faisceau et de l'aimant détermine l'angle de déviation, la prise en compte du décalage du faisceau revient à ajouter les écarts (faisceau réel - faisceau nominal) aux écarts (aimant en position réelle - aimant en position nominale) dans les calculs d'erreurs précédents.

Neuf quadripôles sont installés dans l'arc : un en amont du premier dipôle, un à mi-distance de chaque paire de dipôles et un en aval du 8^{ème} dipôle. Lors d'une mesure d'énergie, le réglage est dispersif et ces quadripôles ne sont pas alimentés. Ils servent cependant à la définition du trajet nominal du faisceau qui a servi à aligner les dipôles et à la mesure de l'écart entre le trajet réel et le trajet nominal. Cette mesure est réalisée par des mesureurs de position (BPM) installés à proximité de chacun des quadripôles et sont calibrés grâce à ces quadripôles. La lecture des BPM au cours de la mesure d'énergie (mode dispersif) indique un écart typique de $\pm 1\text{mm}$ en x comme en y . Les tolérances de positionnement des aimants seront donc augmentées de cet écart pour le calcul de l'erreur. Les écarts angulaires en lacet et tangage sont déterminés en divisant l'écart en position observé par la distance entre deux BPM successifs (longueur de la maille de l'arc : 5.2m). Ils contribuent donc à une augmentation de $\pm 0.2\text{mrad}$ de λ et τ . Il n'y a pas de contribution supplémentaire à l'erreur de roulis ρ .

Notons que dans le but de perturber le moins possible le champ magnétique des dipôles BA de l'arc, le tube faisceau, initialement en acier inoxydable, a été remplacé par un tube en Aluminium.

3.4.4 Corrections et incertitudes liées aux contributions magnétiques parasites à l'intégrale de champ

Les régions, le long du tube faisceau, situées entre les deux paires de profileurs (d'amont et d'aval), sont le siège d'un champ résiduel ou parasite dont la composante verticale contribue elle aussi à la déviation horizontale du faisceau⁹. Il s'agit de 9 régions quasiment identiques, de 2.2m de long chacune, et composées :

- d'un quadripôle (de type QA) de 300mm de longueur magnétique.
- d'un sextupôle de 300mm de longueur magnétique.
- d'un dipôle correcteur, d'environ 200mm de longueur magnétique, déviant le faisceau horizontalement dans 5 des 9 régions¹⁰ et verticalement dans les 4 autres régions.
- le reste des 2.2m, soit 1.4m par région, reçoit un BPM et divers équipements de vide. Rappelons que la contribution des régions situées 200mm de part et d'autre du fer de chaque dipôle BA est prise en compte au titre de champ principal. La longueur totale de l'espace libre de tout aimant, principal ou auxiliaire, est donc de 1m par région et de 9m pour tout l'arc auxquels il faut rajouter 3m correspondant au segment rectiligne entre la fin de l'arc et la paire de profileurs d'aval.

3.4.4.1 Contribution du champ rémanent des aimants auxiliaires

Rappelons que les aimants auxiliaires¹¹ ne sont pas alimentés durant la mesure d'énergie (réglage dispersif de l'arc) et qu'ils ont de plus subi une procédure de dégaussage à l'instauration du réglage dispersif. Il subsiste néanmoins dans ces aimants un champ rémanent qui a été étudié pour la mesure d'énergie dans le hall C [31]. La seule contribution non négligeable trouvée lors de cette étude est celle des 6 dipôles correcteurs horizontaux pour lesquels :

$$B_{y\text{rémanent}} = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ T} \quad (\text{valeur centrale}) \quad (3.65)$$

Soit :

$$\int_{\text{un dipôle}} B_{y\text{rémanent}} dz = 0.48 \cdot 10^{-4} \text{ T.m} \quad (3.66)$$

Ces mesures seront refaites en juillet 1998. Elles donnent lieu à une correction C_r de l'intégrale de champ :

$$I^{\text{corrigé}} = I^{\text{non corrigé}} + C_r \quad (3.67)$$

En valeur relative, pour 6 dipôles correcteurs horizontaux et 8 dipôles BA, cette correction est inversement proportionnelle à l'énergie E du faisceau :

$$\frac{C_r}{I} = \frac{1.6 \cdot 10^{-4}}{E_{[\text{GeV}]}} \quad (3.68)$$

9. Entre deux profileurs d'une même paire nous avons entouré le tube faisceau de μ métal de sorte que le champ résiduel dans ces régions soit négligeable.

10. Un sixième correcteur horizontal est placé entre la fin de l'arc et la paire de profileurs d'aval.

11. Une partie des quadripôles, la totalité des sextupôles, et une partie des dipôles correcteurs ne sont désormais plus utilisés même en réglage achromatique. Il est prévu que ces aimants soient enlevés de la ligne faisceau.

Nous estimons pour l'instant cette correction connue et reproductible à 20% près, d'où $\Delta C_r = 0.2C_r$. Pour l'incertitude sur I , on adopte :

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{3.2 \cdot 10^{-5}}{E_{[\text{GeV}]}} \quad (3.69)$$

3.4.4.2 Contribution du champ ambiant

Il s'agit de la contribution à l'intégrale de champ I provenant de la longueur totale libre de 12m décrite précédemment et située le long de la ligne faisceau. Le champ qui y règne est la somme de deux contributions :

- le champ ambiant proprement dit, lui-même composé du champ terrestre et de la contribution éventuelle des masses ferromagnétiques proches (armatures du béton).
- le champ de fuite à grande distance des aimants principaux et le champ induit par leurs câbles d'alimentation.

Le champ ambiant proprement dit ne peut-être mesuré qu'en l'absence des aimants principaux de l'arc. Une première série de mesures, en 1993, avant l'installation des dipôles BA, a conduit à $B_y = -0.5 \cdot 10^{-4}\text{T}$, soit l'amplitude et le signe du champ terrestre attendu. Une seconde série de mesures aura lieu en juillet 1998, lorsque les aimants BA seront retirés de l'arc pour la mesure de l'intégrale de champ relative. La comparaison de ces deux séries de mesures fournira une estimation de l'incertitude avec laquelle nous contrôlons cette contribution.

Par ailleurs, actuellement, les câbles d'arrivée et de départ du courant des dipôles sont séparés par une distance importante, de sorte que l'ensemble constitue des sources de champ magnétique parasite ne satisfaisant pas aux exigences de la mesure ARC. Cette disposition sera corrigée en juillet 98 de telle manière que l'estimation de sa contribution à l'intégrale de champ I devienne inférieure à 10^{-6} en valeur relative à 1GeV.

Lors de la remise en service de l'arc (août 1998), nous procéderons à une nouvelle mesure de l'intégrale du champ le long de la région du champ ambiant. Cette mesure inclura toutes les contributions citées dans ce paragraphe : champ terrestre, champ d'aimantation du bâtiment, champ de fuite à grande distance des aimants et contribution des câbles d'alimentation¹². Elle sera faite au moyen d'un microteslamètre et pour deux valeurs du courant dans les aimants principaux : $i = 0\text{A}$ et $i = 300\text{A}$. Nous en déduirons une nouvelle correction, de la forme :

$$I^{\text{corrigé}} = I^{\text{non corrigé}} (1 + C_p) + C'_p \quad (3.70)$$

avec C_p : la correction, proportionnelle au courant, correspondant aux champs de fuite à grande distance,

C'_p : la correction indépendante du courant, correspondant au champ ambiant (champ

12. A l'intérieur de la longueur magnétique des aimants auxiliaires, nous estimons que le champ ambiant est écranté par les aimants eux-mêmes, donc ne contribue pas à l'intégrale de champ I . La contribution du champ terrestre dans les régions de 200mm situées de part et d'autre des dipôles BA est prise en compte, pour ce qui est de sa composante verticale, au titre de la mesure du champ principal.

terrestre, aimantation de matériaux)

Pour les valeurs et les incertitudes de C_p et C'_p , notre estimation actuelle est :

$$C_p = 0,$$

$$\Delta C_p = 2.10^{-5},$$

$$C'_p = 6.10^{-4}\text{T.m (champ terrestre),}$$

$$\Delta C'_p = 0.6.10^{-4}\text{T.m} \left(\frac{\Delta I}{I} = \frac{3.4.10^{-5}}{E_{[\text{GeV}]}} \right)$$

Cause d'erreur	Ordre	Formule	Valeur des incertitudes	Contribution à $(\Delta I/I)$	Tolérance pour $(\Delta I/I)=10^{-5}$
Roulis du dipôle de réf.	2	$\frac{\Delta I}{I} \simeq \frac{\rho^2}{2}$	$ \rho < 1\text{mrad}$	$ \frac{\Delta I}{I} < 5. 10^{-7}$	$\rho = 4.5\text{mrad}$
Tangage du dipôle de réf.	2	$\frac{\Delta I}{I} = 16 \tau^2$	$ \tau < 0.3\text{mrad}$	$1.5 10^{-6}$	$\tau = 0.8\text{mrad}$
Lacet du dipôle de réf.	2	$\frac{\Delta I}{I} = 24 \lambda^2$	$ \lambda < 0.1\text{mrad}$	$2.4 10^{-7}$	$\lambda = 0.6\text{mrad}$
Effet thermique	1	$ \frac{\Delta I}{I} < 10^{-6} \Delta \mathcal{T}_{[^\circ\text{C}]}$	$ \Delta \mathcal{T} < 2^\circ\text{C}$	$2. 10^{-6}$	$\Delta \mathcal{T} = 10^\circ\text{C}$
Bobines A et B :	1	$\frac{\Delta I}{I} = \left(\frac{L_D - L_0}{L_D} \right) \frac{\Delta \overline{A}^*}{\overline{A}}$		$3.6 10^{-7}$	$\frac{\Delta \overline{A}^*}{\overline{A}} = 6. 10^{-3}$
Aire magn. moy.,	1		$ \frac{\Delta \overline{A}}{\overline{A}} < 1. 10^{-4}$		
Roulis (ρ),	2		$ \rho_{A/B} < 4\text{mrad}$		
Tangage (τ),	2		$ \tau_{A/B} < 4\text{mrad}$		
position en x ,	1		$ \frac{x_A + x_B}{2} < 0.1\text{mm}$		
Effet thermique	1		$ \frac{\mathcal{T}_A + \mathcal{T}_B}{2} - \mathcal{T}_0 < 10^\circ\text{C}$		
		$G_x < 2.4 10^{-5}\text{mm}^{-1}$ $\left(\frac{L_D - L_0}{L_D} \right) \simeq \frac{5}{3000}$			
Position en y des bobines A et B	2	$\frac{\Delta I}{I} = 10^{-5} (\Delta y)^2$	$ \Delta y < 0.5\text{mm}$	$2.5 10^{-6}$	$\Delta y = 1\text{mm}$
Incertainitude sur L_G	1	formule (3.42)	$ \frac{\Delta L_{G_0}}{L_{G_0}} < 6.6 10^{-6}$	$2. 10^{-5}$	$ \frac{\Delta L_G}{L_G} = 10^{-5}$
Incertainitude sur $\rho_{A/B}^*$	1	cf. section 3.2.5.3	$ \rho_{A/B}^* < 3\mu\text{m}$	$1. 10^{-6}$	$\rho_{A/B}^* = 30\mu\text{m}$
Incertainitude sur B_0	1	$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta B_0}{B_0}$	$ \frac{\Delta B_0}{B_0} < 10^{-5}$	$1. 10^{-5}$	$ \frac{\Delta B_0}{B_0} = 10^{-5}$
Incertainitude sur x_{B_0}	1	$\frac{\Delta I}{I} = \Delta x_{B_0} G_{x_c}$ $G_{x_c} < 1.2 10^{-5}\text{mm}^{-1}$	$ \Delta x_{B_0} < 0.2\text{mm}$	$2.4 10^{-6}$	$\Delta x_{B_0} = 0.8\text{mm}$
TOTAL somme linéaire :		$4.0 10^{-5}$			
TOTAL somme quadratique :		$2.3 10^{-5}$			

Tableau 3.10 - Contribution de chacune des sources d'erreur associée à la mesure de l'intégrale de champ de référence sur la mesure absolue de l'intégrale de champ que subit le faisceau, tolérances nécessaires pour qu'une incertitude isolée produise une erreur de 10^{-5} sur I . (G_{x_c} pour $G_{x_{central}}$, x_{B_0} est la position selon x où est mesuré B_0 , ici on a noté $\rho_{A/B}^*$ le décalage entre le centre magnétique et le centre géométrique d'une bobine pour le différentiel de $\rho_{A/B}$ l'angle de roulis.)

Cause d'erreur	Ordre	Formule	Valeur des incertitudes	Contribution à $(\Delta\theta/\theta)$	Tolérance pour $(\Delta\theta/\theta)=10^{-5}$
Roulis d'1 dipôle de l'arc	2	$\Delta\theta = \rho^2 \frac{\sin(\theta/4)}{4}$	$ \rho < 1\text{mrad}$	$ \frac{\Delta\theta}{\theta} < 6.2 \cdot 10^{-8}$	$\rho = 12.6\text{mrad}$
Tangage d'1 dipôle de l'arc	2	$\frac{\Delta\theta}{\theta} = 2\tau^2$	$ \tau < 1.2\text{mrad}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$\tau = 2.3\text{mrad}$
Lacet d'1 dipôle de l'arc	2	$\frac{\Delta\theta}{\theta} = 3.4\lambda^2$	$ \lambda < 1.2\text{mrad}$	$4.9 \cdot 10^{-6}$	$\lambda = 1.7\text{mrad}$
Position en x	1	$\frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{G_x \Delta x}{8}$	$ \Delta x < 1.5\text{mm}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$	$\Delta x = 3.3\text{mm}$
Position en y	2	$\frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{10^{-5}}{8} (\Delta y_{[\text{mm}]})^2$	$ \Delta y < 1.5\text{mm}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$\Delta y = 2.8\text{mm}$
Position en z	aucune contribution				
TOTAL somme linéaire (1 dipôle) : $ \frac{\Delta I}{I} < 4. \cdot 10^{-5}$			TOTAL somme quadratique (1 dipôle) : $\frac{\sigma(\Delta I)}{I} = 2.3 \cdot 10^{-5}$		
TOTAL somme linéaire (8 dipôles) : $ \frac{\Delta I}{I} < 1.5 \cdot 10^{-5}$			TOTAL somme quadratique (8 dipôles) : $\frac{\sigma(\Delta I)}{I} = 2.8 \cdot 10^{-6}$		

Tableau 3.11 - Contribution de chacune des sources d'erreur associée au positionnement des dipôles dans l'arc et à la déviation du faisceau par rapport à sa trajectoire nominale sur la mesure de l'intégrale de champ que subit le faisceau, tolérances nécessaires pour qu'une incertitude isolée produise une erreur de 10^{-5} sur θ (angle de déviation du faisceau).

Cause d'erreur	Ordre	Formule	Contribution à $(\Delta I/I)$			
			$E=0.5\text{GeV}$		$E=4\text{GeV}$	
			Linéaire	Quadratique	Linéaire	Quadratique
Blindage magnétique	1	$\frac{\Delta I}{I} = \frac{1.2 \cdot 10^{-6}}{E_{[\text{GeV}]}}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$
I_{relative}	1		$1.4 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$
Correction I_{courbe}	1	$\frac{\Delta I}{I} = \Delta C_c$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$
Champ rémanent	1	$\frac{\Delta I}{I} = \frac{3.2 \cdot 10^{-5}}{E_{[\text{GeV}]}}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-6}$	$8.0 \cdot 10^{-6}$
Champs de fuite C_p	1	$\frac{\Delta I}{I} = \Delta C_p$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$
Champ ambiant C'_p	1	$\frac{\Delta I}{I} = \frac{3.4 \cdot 10^{-5}}{E_{[\text{GeV}]}}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$8.5 \cdot 10^{-6}$	$8.5 \cdot 10^{-6}$
TOTAL :			$3.2 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$5.9 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3.12 - Contribution de l'incertitude sur la mesure de l'intégrale de champ relative et des champs parasites. L'incertitude sur la mesure de champ magnétique dans le blindage est de $0.1\mu T$.

3.5 Conclusion

Les calculs d'erreur détaillés précédemment conduisent aux résultats portés dans le tableau (3.13). Nous interpréterons ces résultats dans la conclusion générale sur la mesure d'énergie ARC.

	$E=0.5\text{GeV}$		$E=4\text{GeV}$	
	Somme linéaire	Somme quadratique	Somme linéaire	Somme quadratique
Tableau 3.10	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$
Tableau 3.11	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$
Tableau 3.12	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$5.9 \cdot 10^{-5}$
TOTAL :	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3.13 - *Sommes linéaire et quadratique des erreurs sur la mesure de l'intégrale de champ que voit le faisceau dans l'arc de déviation. Tableau 3.10 : intégrale de champ de référence, tableau 3.11 : positionnement des 8 dipôles dans l'arc, tableau 3.12 : intégrale de champ relative et champs parasites.*

Le transport du mesureur et du dipôle de référence est prévu mi-avril 1998. La mesure de l'intégrale de champ du dipôle de référence sera opérationnelle mi-mai. A cette date, nous utiliserons pour l'intégrale relative les données acquises en 1992 sur le "Dipole Stand". Pour un faisceau de 4GeV, la somme linéaire des incertitudes sur l'intégrale de champ sera alors de $3.1 \cdot 10^{-4}$ et la somme quadratique de $1. \cdot 10^{-4}$.

Chapitre 4

Conclusion sur le projet ARC

Nous avons recensé dans les chapitres précédents les différentes sources d'erreur qui peuvent affecter la mesure absolue de l'énergie du faisceau. Deux comptabilités ont été tenues : la somme linéaire (Σ_L) et la somme quadratique (Σ_Q) des erreurs. Ces deux quantités caractérisent la distribution de probabilité attendue pour l'écart ΔE entre l'énergie vraie du faisceau et sa valeur mesurée. Cette distribution est schématisée sur la figure [4.1].

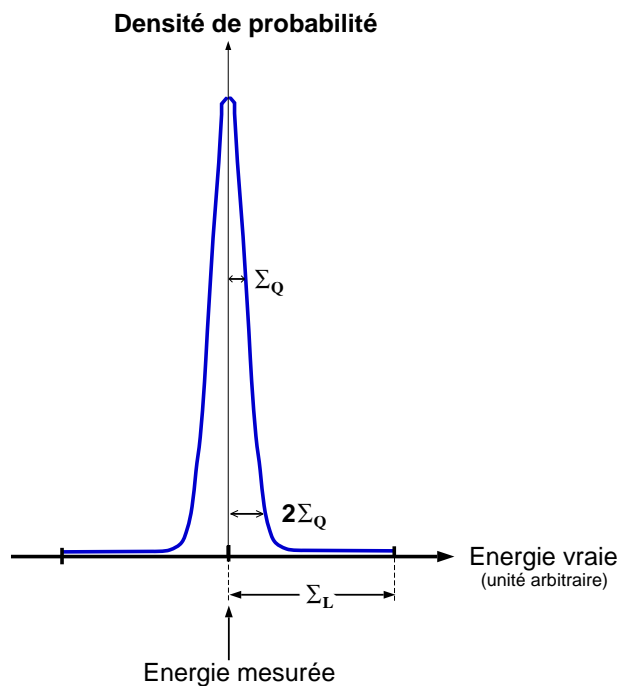


Figure 4.1 - *Distribution de probabilité d'erreur.*

- Σ_L est la demi-largeur à la base de la distribution. Cette quantité traduit donc la “certitude” que $|\Delta E|$ soit inférieure à Σ_L .
- Σ_Q est la variance de la distribution d'erreur. Dans l'approximation Gaussienne, il existe une probabilité de 95% pour que $|\Delta E|$ soit inférieure à $2 \Sigma_Q$.

	$E = 0.5\text{GeV}$		$E = 4\text{GeV}$	
	Σ linéaire	Σ quadrat.	Σ linéaire	Σ quadrat.
Angle de déviation	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Intégrale de champ	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$
Mesure d'énergie	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$

Tableau 4.1 - *Sommes linéaire et quadratique des erreurs sur la mesure d'énergie.*

Le cumul des erreurs de la mesure d'angle et de la mesure d'intégrale de champ est donné dans le tableau (4.1).

La grande différence entre \sum_L et \sum_Q traduit le fait que la probabilité pour que l'erreur réelle se situe à proximité de l'extrémité de l'intervalle de base $\pm \sum_L$ est très faible. Il faudrait pour cela qu'une large majorité des sources dominantes d'erreur aient contribué avec leur amplitude maximum et le même signe, ce qui est fort peu probable du fait du nombre élevé de ces erreurs.

Pour rester cohérent avec les autres mesures d'énergie que nous avons citées dans le chapitre 1 : CEBAF/e-p et SLAC/SLC, c'est la somme quadratique que nous retiendrons pour qualifier la méthode ARC :

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| < 1.2 \cdot 10^{-4} \quad (\text{à } 0.5\text{GeV}) \quad (4.1)$$

et une probabilité de 95% d'un écart, en valeur absolue, inférieur à $2.4 \cdot 10^{-4}$.

Notons que l'installation à Jefferson Lab. de la mesure ARC n'est pas terminée à l'heure actuelle (mars 1998). Pour la partie mesure d'angle, il nous reste à améliorer la stabilité du faisceau et à faire en sorte que le passage du réglage du faisceau du mode achromatique au mode dispersif devienne une simple opération de routine. Pour la partie mesure d'intégrale de champ, il reste d'abord l'installation, la calibration et la mise en service à Jefferson Lab. (mi-avril 1998), ensuite les mesures d'intégrales de champ relatives des 9 dipôles (juillet 1998) et, dans la même période, la mesure des champs parasites dans l'arc. A la suite de ces travaux, une nouvelle estimation de précision sera faite.

L'expérience G_{Ep} (mesure du facteur de forme électrique du proton), qui aura lieu en mai/juin 1998, sera la première à bénéficier de la mesure d'énergie ARC et jouera le rôle de banc d'essai. A partir de l'été 1998, toutes les expériences du Hall A devront intégrer des mesures périodiques d'énergie par la méthode ARC dans les contrôles de routine de caractéristiques du faisceau, au même titre que la calibration de la mesure de l'intensité du faisceau ou que la détermination de la dimension du profil du faisceau sur la cible.

Les développements futurs prévisibles pour la méthode ARC sont :

- à court terme: le couplage entre les profileurs à fils et les mesureurs de position (BPM), destiné à rendre non destructive et continue la mesure de l'angle de déviation du faisceau,
- à long terme, l'augmentation de l'énergie du faisceau jusqu'à 12GeV qui nécessitera un changement des dipôles de l'arc.

ANNEXES

Annexe A

Systèmes d'unité

Les trois principaux systèmes d'unité utilisés sont :

- Le **S**ystème **I**nternational (**S.I.** ou **MKSA** : **M**ètre, **K**ilogramme, **S**econde, **A**mpère),
- Le système **CGS** : **C**entimètre, **G**ramme, **S**econde,
- Le système **Heaviside-Lorentz** et Gauss.

Le système international est le plus largement employé mais pour des problèmes microscopiques le système CGS a la préférence. En physique des particules, on adopte les systèmes Heaviside-Lorentz ou de Gauss qui permettent d'écrire les équations de Maxwell sous une forme très simple. Les systèmes de Gauss et Heaviside-Lorentz diffèrent d'un facteur 4π . Dans Heaviside-Lorentz et Gauss, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ et $\hbar = c = 1$.

Système	ϵ_0	μ_0	D, H	α	r_0
MKSA	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$	$4\pi 10^{-7}$	$B = \mu_0 H + M$ $D = \epsilon_0 E + P$	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$
CGS	1	1	$D = E + 4\pi P$ $B = H + 4\pi M$	e^2	$\frac{e^2}{m_e}$
H-L	1	1	$D = E + P$ $B = H + M$	$\frac{e^2}{4\pi}$	$\frac{e^2}{4\pi m_e}$

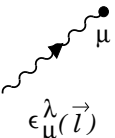
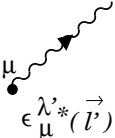
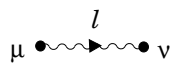
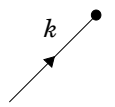
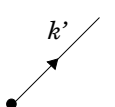

Tableau A.1 - *Systèmes d'unité*

Annexe B

Rappels d'électrodynamique quantique

B.1 Règles de Feynman

Nous nous limiterons ici à rappeler les règles de Feynman utiles pour le calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique $p(e, e')p'$ et à la diffusion Compton virtuelle $e p \gamma^* \rightarrow e' p' \gamma$. On se référera aux nombreux ouvrages existants sur l'électrodynamique quantique pour obtenir l'ensemble de ces règles. On citera entre autres le livre de C. Itzykson et J.B. Zuber[56] et le rapport de J. Picard[55] dont je me suis inspirée ici.

Type de particule	Entrante	Sortante	Propagateur
<u>Photon</u> <i>Energie</i> $l^0 = \vec{l} $ <i>λ indice de polarisation</i>	 $\epsilon_{\mu}^{\lambda}(\vec{l})$	 $\epsilon_{\mu}^{\lambda^*}(\vec{l}')$	 $-\frac{ig_{\mu\nu}}{l^2 + i\epsilon}$ (Jauge de Feynman)
<u>Fermion</u> <i>Energie</i> $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}$ <i>spin s</i>	 $u(k, s)$	 $\bar{u}(k', s')$	 $\frac{i}{k \cdot M + i\epsilon} = \frac{i(\not{k} + M)}{k^2 - M^2 + i\epsilon}$

Vertex

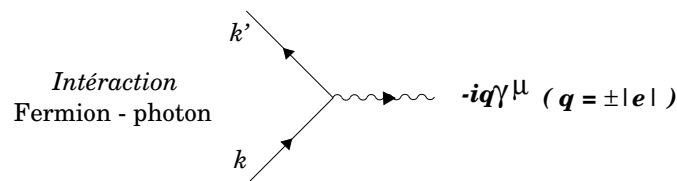


Figure B.1 - Règles de Feynman.

L'expression générale du propagateur du photon est :

$$\frac{i(-g_{\mu\nu} + (1 - \eta) \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 + i\varepsilon)})}{l^2 + i\varepsilon} \quad (\text{B.1})$$

Selon la jauge utilisée pour le calcul, η vaudra 0 (jauge de Landau) ou 1 (jauge de Feynman).

Notes :

- L'énergie-impulsion est conservée à chaque vertex.
- Ecriture de l'élément de matrice d'un graphe donné :

On écrit les spineurs (u et \bar{u}) relatifs aux fermions de droite à gauche en remontant le sens des flèches et en intercalant les vertex et les propagateurs au fur et à mesure qu'ils apparaissent en remontant la ligne de fermion.

- Il convient d'intégrrer sur toutes les variables associées aux processus virtuels ou non mesurées explicitement. Exemple : les quadrimoments non fixés par la conservation de l'énergie-impulsion, les spins non mesurés (moyenne sur les spins initiaux, somme sur les spins finals).

Matrice de transition associée à la diffusion élastique électron-proton dans l'approximation de Born :

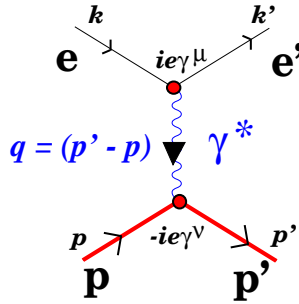


Figure B.2 - *Approximation de Born pour la diffusion élastique.*

En appliquant les règles de Feynman ci-dessus, on obtient la matrice de transition T :

$$T = \bar{u}(k', s')(ie\gamma^\mu)u(k, s) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p', \sigma')(-ie\Gamma^\nu)u(p, \sigma) \quad (\text{B.2})$$

De part l'extension finie du proton, on est amené à remplacer γ^ν , cas au vertex leptonique, par Γ^ν qui s'exprime en fonction des facteurs de forme élastiques F_1 et F_2 du proton :

$$\Gamma^\nu = \gamma^\nu F_1(q^2) + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\mu F_2(q^2) \quad (\text{B.3})$$

Le premier terme, $\gamma^\nu F_1(q^2)$, faisant intervenir le facteur de forme de distribution de charge autour du proton est le “couplage de Dirac”. Le second, $\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2M} q_\mu F_2(q^2)$, est le “couplage de Pauli”. $F_2(q^2)$ est le facteur de forme décrivant la “distribution de magnétisation” autour du proton. M est la masse au repos du proton.

B.2 Relations utiles

Equation de Dirac :

$$\begin{aligned} (\not{p}_e - m_e) u(p_e, s_e) &= 0 \\ \bar{u}(p'_e, s'_e) (\not{p}'_e - m_e) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Autres relations utiles :

$$\not{p}_e \gamma^\mu = 2p_e^\mu - \gamma^\mu \not{p}_e \quad (\text{B.5})$$

$$\gamma^\mu \not{p}'_e = 2p_e'^\mu - \not{p}'_e \gamma^\mu \quad (\text{B.6})$$

B.3 Paramétrisation de Feynman

Cas où deux facteurs sont présents au dénominateur :

→ Introduction d'un paramètre de Feynman x :

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[xA + (1-x)B]^{\alpha+\beta}} \quad (\text{B.7})$$

Cas où trois facteurs sont présents au dénominateur :

→ Introduction de deux paramètres de Feynman x et y :

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta C^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \cdot x \int_0^1 dy \frac{u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} u_3^{\gamma-1}}{[u_1 A + u_2 B + u_3 C]^{\alpha+\beta+\gamma}} \quad (\text{B.8})$$

avec :

$$u_1 = xy \quad u_2 = x(1-y) \quad u_3 = 1-x$$

Cas où quatre facteurs sont présents au dénominateur :

→ Introduction de trois paramètres de Feynman x, y et z :

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma) \Gamma(\delta)} \int_0^1 dx \cdot x^2 \int_0^1 dy \cdot y \quad (\text{B.9})$$

$$\times \int_0^1 dz \frac{u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} u_3^{\gamma-1} u_4^{\delta-1}}{[u_1 A u_2 B u_3 C u_4 D]^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}} \quad (\text{B.10})$$

avec :

$$u_1 = 1-x \quad u_2 = xyz \quad u_3 = x(1-y) \quad u_4 = xy(1-z)$$

B.4 Algèbre en D-dimensions :

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= D \\
\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= (2 - D) \gamma^\alpha \\
\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu &= 4 g^{\alpha\beta} + (D - 4) \gamma^\alpha \gamma^\beta \\
\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma_\mu &= -2 \gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha + (4 - D) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Nous nous sommes limités ici aux formules les plus utilisées. De nombreuses autres formules sont données dans [75] page 292 et dans de nombreux autres ouvrages.

B.5 Intégrales utiles en D-dimensions :

Se reporter par exemple au livre de Mandl & Shaw [75], page 293.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{[k^2]^r}{(k^2 - R^2)^m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(2\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(r + D/2) \Gamma(m - r - D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(m) (R^2)^{m-r-D/2}} \tag{B.12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^D k k^\mu k^\nu f(k^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{D} \int_{-\infty}^{\infty} d^D k k^2 f(k^2) \tag{B.13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^D k k^{\mu_1} \dots k^{\mu_{2n+1}} f(k^2) \equiv 0 \tag{B.14}$$

Quelques propriétés de la fonction Γ :

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(1 + z) = z\Gamma(z) \quad \Gamma(1 + n) = n!$$

avec z un nombre rationnel et n un entier.

Intégrales utiles :

$$\int_0^1 dx \frac{1}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^\varepsilon} = m_e^{-2\varepsilon} \left[1 + \varepsilon \left(2 - \ln \frac{v+1}{v-1} \right) \right] \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \frac{1}{[m_e^2 - q^2 x(1-x)]^{1+\varepsilon}} = & \frac{m_e^{-2\varepsilon}}{Q^2} \left[\frac{2}{v} \ln \frac{v+1}{v-1} + \frac{\varepsilon}{v} \left(\ln \frac{v+1}{v-1} \ln \frac{v^2-1}{4v^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \left\{ Sp \left(\frac{v+1}{2v} \right) - Sp \left(\frac{v-1}{2v} \right) \right\} \right) \right] \tag{B.16}
\end{aligned}$$

$$-v^2 = 1 + 4 \frac{m_e^2}{Q^2}; Q^2 = -q^2 > 0,$$

– $Sp(t)$ est la fonction de Spence ou fonction dilogarithme définie par :

$$Sp(t) = - \int_0^t \frac{\ln(1-x)}{x} dx \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Compléments au calcul des corrections radiatives à la diffusion élastique électron-proton

Dans la section 2.3 du chapitre 2, nous présentons les résultats associés aux différents types de corrections radiatives internes à la diffusion élastique électron-proton. Nous nous proposons ici de donner les principales étapes de calcul conduisant à chacun de ces résultats. On rappelle que nous évaluons ces corrections radiatives au premier ordre, c'est à dire que nous ne considérons que les graphes contribuant à l'ordre α^3 au niveau de la section efficace. On rappelle que nous négligeons les effets radiatifs dus au proton.

C.1 Bremsstrahlung interne

Seuls les graphes (e1) et (e2) de la figure (C.1) sont à considérer pour le calcul des corrections radiatives au premier ordre à la diffusion élastique électron-proton. Après établissement de l'expression de la section efficace totale de Bremsstrahlung interne (2.15, page 51), nous adopterons la régularisation dimensionnelle (cf. page 61) pour le traitement de la divergence infrarouge.

L'amplitude associée au graphe e1, correspondant à un photon réel rayonné par l'électron incident, sera notée \mathcal{M}_d (d pour direct) tandis que celle se rapportant au graphe e2 où le photon réel est émis par l'électron diffusé, sera notée \mathcal{M}_c (c pour croisé).

A l'aide des règles de Feynman rappelées dans l'annexe B et en adoptant les notations de la figure (C.1), on écrira l'amplitude de diffusion totale, $\mathcal{M}_{pm} = \mathcal{M}_d + \mathcal{M}_c$, associée à l'émission de photons mous (pm), sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{pm} = & \varepsilon_\mu^*(l, \lambda) \cdot \bar{u}(p'_p, s'_p) [-ie\Gamma^\beta] u(p_p, s_p) \cdot \frac{-ig_{\delta\beta}}{q^2} \\ & \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \left\{ [ie\gamma^\delta] i \frac{\not{p}'_e - \not{l} + m_e}{(p_e - l)^2 - m_e^2} [ie\gamma^\mu] \right. \\ & \left. + [ie\gamma^\mu] i \frac{\not{p}'_e + \not{l} + m_e}{(p'_e + l)^2 - m_e^2} [ie\gamma^\delta] \right\} \cdot u(p_e, s_e) \end{aligned} \quad (C.1)$$

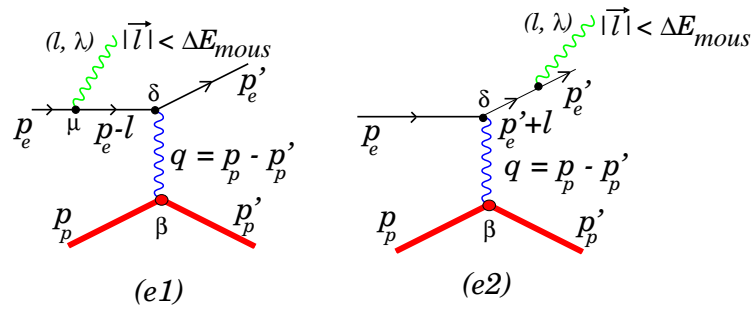


Figure C.1 - Graphes à prendre en compte pour le calcul des corrections radiatives réelles au premier ordre. On associe au photon réel émis un quadrimoment l et une hélicité λ . L'énergie $|\vec{l}|$ du photon rayonné est inférieure à ΔE_{mous} . On définit ΔE_{mous} comme l'énergie maximum des photons qui ne peuvent pas être discriminés par l'appareillage. δ , β et μ désignent les différents vertex.

avec :

- l : quadrivecteur associé au photon réel rayonné. $|\vec{l}| = \bar{l}$ son énergie.
- $u(p_p, s_p)$, $\bar{u}(p'_p, s'_p)$ et p_p , p'_p : spineurs et quadrivecteurs associés respectivement au proton incident et au proton sortant. s_p , s'_p : spins initial et final du proton.
- $\bar{u}(p'_e, s'_e)$, $u(p_e, s_e)$ et p_e , p'_e : spineurs et quadrivecteurs associés respectivement à l'électron incident et à l'électron diffusé. s_e , s'_e : spins initial et final de l'électron.
- m : masse au repos de l'électron et e la valeur absolue de sa charge.

A partir de l'expression générale du propagateur du photon, rappelée dans l'annexe B, on peut montrer que l'expression de l'amplitude totale (C.1) est indépendante de la jauge choisie (Feynman ou Landau) pour le propagateur du photon.

Γ^β caractérise le vertex hadronique et s'écrit en fonction des facteurs de forme du proton, se reporter au paragraphe B.3 page 244.

L'expression C.1 se simplifie notablement en employant certaines des relations rappelées dans l'annexe B, page 245. En outre, dans la limite des photons mous ($|\vec{l}| \rightarrow 0$), on néglige les termes en l devant ceux en p_e et p'_e . On souligne que cette approximation n'est valable que pour des photons réels d'énergie inférieure à ΔE_{mous} . Pour des photons réels d'énergie supérieure à ΔE_{mous} , on doit nécessairement appliquer la formule exacte (C.1). Pour la diffusion élastique néanmoins, il est d'usage d'identifier ΔE_{mous} à la coupure expérimentale en énergie ΔE_{cut} car cette dernière est très inférieure aux énergies mises en jeu par ailleurs dans le processus. En négligeant les termes en l , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{pm} = & \varepsilon_\mu^*(l, \lambda) \cdot \frac{ie^3}{q^2} \cdot \bar{u}(p'_p, s'_p) \Gamma_\delta u(p_p, s_p) \\ & \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \left\{ \left[\frac{p_e^\mu}{p_e \cdot l} - \frac{p_e^\mu}{p_e \cdot l} \right] \gamma^\delta \right\} u(p_e, s_e) \end{aligned} \quad (C.2)$$

En définissant P^μ tel que :

$$P^\mu = \frac{p_e'^\mu}{p_e' \cdot l} - \frac{p_e^\mu}{p_e \cdot l} \quad (C.3)$$

on réexprimera (C.2) sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{pm} = & \quad \varepsilon_\mu^*(l, \lambda) \cdot \frac{ie^3}{q^2} \cdot \bar{u}(p_p', s_p') \Gamma_\delta u(p_p, s_p) \\ & \cdot P^\mu \bar{u}(p_e', s_e') \gamma^\delta u(p_e, s_e) \end{aligned} \quad (C.4)$$

Dans l'équation (C.4), on peut factoriser l'amplitude de Born \mathcal{M}_{Born} :

$$\mathcal{M}_{Born} = \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_p', s_p') \Gamma_\delta u(p_p, s_p) \cdot \bar{u}(p_e', s_e') \gamma^\delta u(p_e, s_e) \quad (C.5)$$

Finalement, on a :

$$\mathcal{M}_{pm} = e \varepsilon_\mu^*(l, \lambda) P^\mu \mathcal{M}_{Born} \quad (C.6)$$

Pour obtenir la densité de probabilité correspondant à l'émission d'un photon mou, on prendra le module carré de (C.6) et on sommera sur les états d'hélicité du photon réel ($\lambda = \pm 1$) :

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu = -g_{\mu\nu} + (1 - \eta) \frac{l^\mu l^\nu}{l^2}$$

Sachant que $P \cdot l = 0$, quelque soit la jauge choisie, on a :

$$\sum_{\lambda=\pm 1} |\mathcal{M}_d + \mathcal{M}_c|^2 = e^2 |\mathcal{M}_{Born}|^2 (-P^2) \quad (C.7)$$

avec

$$P^2 = -\frac{2(p_e \cdot p_e')}{(p_e \cdot l)(p_e' \cdot l)} + \frac{m_e^2}{(p_e \cdot l)^2} + \frac{m_e^2}{(p_e' \cdot l)^2} \quad (C.8)$$

La section efficace de Bremsstrahlung interne s'exprimera donc en fonction de la section efficace correspondant à l'approximation de Born, $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{Born}$, sous la forme :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{Born} e^2 \int_0^{\vec{l} < \Delta E_{mou}} \frac{d^3 \vec{l}}{(2\pi)^3 2\vec{l}} (-P^2) \quad (C.9)$$

avec $\Omega_{e'}$ l'angle solide associé à l'électron diffusé.

La factorisation de la section efficace de Born est alors mise en évidence. L'intégration sur l'espace de phase ouvert au photon mou est indispensable puisque ce dernier ne peut pas être discriminé par l'appareillage dont la résolution en énergie ΔE_{cut} .

En factorisant \vec{l}^2 au dénominateur de P^2 et en décomposant $d^3\vec{l}$ en fonction de l'angle solide ouvert au photon mou $d\Omega_l$ sous la forme $d^3\vec{l} = \vec{l}^2 d\vec{l} d\Omega_l$, on arrive au résultat énoncé page 51 :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{Born} e^2 \int_0^{\Delta E_{mous}} \frac{d\vec{l}}{(2\pi)^3 2\vec{l}} \cdot \int d\Omega_l \left[\frac{2(p_e \cdot p'_e)}{(E_e - \vec{p}_e \cdot \hat{l})(E'_e - \vec{p}'_e \cdot \hat{l})} - \frac{m_e^2}{(E_e - \vec{p}_e \cdot \hat{l})^2} - \frac{m_e^2}{(E'_e - \vec{p}'_e \cdot \hat{l})^2} \right] \quad (C.10)$$

(On pose $\hat{l} = \vec{l}/\vec{l}$)

Annexe D

Intégration des fonctions singulières

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{t - t_0 \pm i\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{t - t_0 \pm i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{(t - t_0) t^m dt}{t^2 + \varepsilon^2} \mp i\varepsilon \int_0^1 \frac{t^m dt}{t^2 + \varepsilon^2} \quad (\text{D.1})$$

En effectuant le changement de variable $z = t - t_0$, (D.1) devient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{t - t_0 \pm i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{z(z+t_0)^m dz}{z^2 + \varepsilon^2} \mp i\varepsilon \int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{(z+t_0)^m dz}{t^2 + z^2} \quad (\text{D.2})$$

En développant¹ $(z+t_0)^m$ et en définissant $J_k^1(\varepsilon) = \int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{z^k dz}{z^2 + \varepsilon^2}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{t - t_0 \pm i\varepsilon} = \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{k+1}^1(\varepsilon) \mp i \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon J_k^1(\varepsilon) \quad (\text{D.3})$$

Il est important de noter que les J_k^n se calculent à partir de l'intégrale au sens de Cauchy. Soit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{z^k dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\int_{a-t_0}^{-\eta} \frac{z^k dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^n} + \int_{-\eta}^{\eta} \frac{z^k dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^n} + \int_{\eta}^{b-t_0} \frac{z^k dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^n} \right] \quad (\text{D.4})$$

On définit :

$$J_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_k^1(\varepsilon) \quad k \geq 1 \quad (\text{D.5})$$

1.

$$(z+t_0)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} z^k \quad \text{avec} \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

A partir de (D.4), on obtient :

$$J_0^1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \tan^{-1} \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \quad J_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_0^1(\varepsilon) = \frac{\pi}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{D.6})$$

$$J_1^1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \ln(z^2 + \varepsilon^2) \quad J_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_1^1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(b - t_0)^2}{(a - t_0)^2} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{D.7})$$

Dans le rapport de J. Van de Wiele *et al.* [84], il est démontré que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon J_k^1(\varepsilon) = \begin{cases} \pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Par suite, la formule (D.3) s'écrit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{t - t_0 \pm i\varepsilon} = \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{k+1}^1(\varepsilon) \mp i\pi t_0^m \quad (\text{D.9})$$

Dans le rapport [84], pour $n = 1$ et $k \geq 2$, on établit la relation de récurrence suivante :

$$J_k^1(\varepsilon) = \frac{1}{k-1} [(b - t_0)^{k-1} - (a - t_0)^{k-1}] - \varepsilon^2 J_{k-2}^1(\varepsilon) \quad (\text{D.10})$$

d'où l'on dérive ($a = 0; b = 1$) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{t - t_0 \pm i\varepsilon} &= J_1 \mp i\pi \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t dt}{t - t_0 \pm i\varepsilon} &= J_2 + t_0 J_1 \mp i\pi t_0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{t - t_0 \pm i\varepsilon} &= J_3 + 2t_0 J_2 + t_0^2 J_1 \mp i\pi t_0^2 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^3 dt}{t - t_0 \pm i\varepsilon} &= J_4 + 3t_0 J_3 + 3t_0^2 J_2 + t_0^3 J_1 \mp i\pi t_0^3 \\ &\dots \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{t - t_0 \pm i\varepsilon} &= \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} J_{k+1} \mp i\pi t_0^m \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$(\text{D.12})$$

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(t - t_0 \pm i\varepsilon)^2}$$

$$\mathcal{I}_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(t - t_0 \pm i\varepsilon)^2} \quad (\text{D.13})$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^1 \frac{t^m [(t - t_0)^2 - \varepsilon^2] dt}{[(t - t_0)^2 + \varepsilon^2]^2} \mp 2i \int_0^1 \frac{t^m [\varepsilon(t - t_0)] dt}{[(t - t_0)^2 + \varepsilon^2]^2} \right] \quad (\text{D.14})$$

On effectue le changement de variable $z = t - t_0$. On obtient :

$$\mathcal{I}_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{(z^2 - \varepsilon^2)(z + t_0)^m dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^2} \mp 2i\varepsilon \int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{z(z + t_0)^m dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^2} \right] \quad (\text{D.15})$$

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{z^{k+2} dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^2} - \varepsilon^2 \int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{z^k dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^2} \mp 2i\varepsilon \int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{z^{k+1} dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^2} \right] \right\} \quad (\text{D.16})$$

En adoptant les notations introduites pour le cas $n = 1$, on définit $J_k^2(\varepsilon)$ tel que :

$$J_k^2(\varepsilon) = \int_{-t_0}^{1-t_0} \frac{z^k dz}{(z^2 + \varepsilon^2)^2} \quad (\text{D.17})$$

Ainsi, on réécrit (D.15) sous la forme :

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [J_{k+2}^2(\varepsilon) - \varepsilon^2 J_k^2(\varepsilon)] \mp 2i \sum_{k=0}^m C_m^k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon J_{k+1}^2(\varepsilon) \quad (\text{D.18})$$

Dans [84], on démontre que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon J_{k+1}^2(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

Par conséquent, seul le terme $k = 1$ contribue à la partie imaginaire.

Pour la partie réelle de (D.18), on définit I_k tel que :

$$I_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (J_{k+2}^2(\varepsilon) - \varepsilon^2 J_k^2(\varepsilon)) \quad (\text{D.20})$$

A partir de (D.19) et (D.20), on trouve que :

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{k=0}^m C_m^k t_0^{m-k} I_k \mp i\pi m t_0^{m-1} \quad (\text{D.21})$$

avec :

$$I_0 = -\frac{1}{t_0} - \frac{1}{1-t_0} \quad I_1 = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1-t_0)^2}{t_0^2} \right]$$

$$I_k = \frac{1}{k-1} [(1-t_0)^{k-1} - (-t_0)^{k-1}] \quad n \geq 2$$

En comparant (D.22) avec (D.10), on déduit que $I_k = J_k$.

Pour $n = 2$, on a [84] :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{(t - t_0 \pm i\epsilon)^2} &= J_0 \\
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t dt}{(t - t_0 \pm i\epsilon)^2} &= J_1 + t_0 J_0 \mp i\pi \\
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(t - t_0 \pm i\epsilon)^2} &= I_2 + 2t_0 I_1 + t_0^2 I_0 \mp i2\pi t_0 \\
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^3 dt}{(t - t_0 \pm i\epsilon)^2} &= I_3 + 3t_0 I_2 + 3t_0^2 I_1 + t_0^3 I_0 \mp i3\pi t_0^2 \\
 &\dots \\
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(t - t_0 \pm i\epsilon)^2} &= \sum_{p=0}^m C_m^p t_0^p I_{m-p} \mp i\pi \frac{d(t_0^m)}{dt_0}
 \end{aligned} \tag{D.22}$$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 dt \frac{t^m}{(\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma' \pm i\varepsilon')^n}}$$

Après factorisation de α' au dénominateur, on se ramène au calcul de l'intégrale \mathcal{I}_n :

$$\mathcal{I}_n = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(t^2 + \beta t + \gamma \pm i\varepsilon)^n} = \alpha'^n \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(\alpha' t^2 + \beta' t + \gamma' \pm i\varepsilon')^n} \tag{D.23}$$

avec :

$$\beta = \frac{\beta'}{\alpha'} \quad \gamma = \frac{\gamma'}{\alpha'} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\alpha'|} \tag{D.24}$$

Commençons par identifier les zéros du dénominateur. Soit Δ le discriminant complexe de $(t^2 + \beta t + \gamma \pm i\varepsilon)$:

$$\Delta = \beta^2 - 4(\gamma \pm i\varepsilon) = \delta \mp 4i\varepsilon \quad \text{avec} \quad \delta = \beta^2 - 4\gamma \tag{D.25}$$

En utilisant la notation d'Euler, on réécrit Δ sous la forme :

$$\Delta = \rho e^{i\theta} \tag{D.26}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{\delta^2 + 16\varepsilon^2} \\
 \cos \theta &= \frac{\delta}{\rho} \\
 \sin \theta &= \mp \frac{4\varepsilon}{\rho}
 \end{aligned}$$

Soit t_- et t_+ les deux valeurs particulières de t qui annulent $(t^2 + \beta t + \gamma \pm i\varepsilon)$:

$$t_- = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2} \quad t_+ = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{D.27})$$

où :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{D.28})$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a :

$$\sqrt{\Delta} \simeq \sqrt{\delta} \left(1 \mp i \frac{2\varepsilon}{\delta} \right) = \sqrt{\delta} \mp i \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} \mp i\tilde{\varepsilon} \quad (\text{D.29})$$

avec $\tilde{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\delta}}$. On exprime alors t_- et t_+ sous la forme :

$$t_- = \frac{-\beta - \sqrt{\delta}}{2} \pm i\tilde{\varepsilon} = t_-^R \pm i\tilde{\varepsilon} \quad t_+ = \frac{-\beta + \sqrt{\delta}}{2} \mp i\tilde{\varepsilon} = t_+^R \mp i\tilde{\varepsilon} \quad (\text{D.30})$$

Annexe E

Compléments au calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle

Par convention, on adopte $q = k - k'$.

E.1 Amplitude des Graphes “Bethe-Heitler”

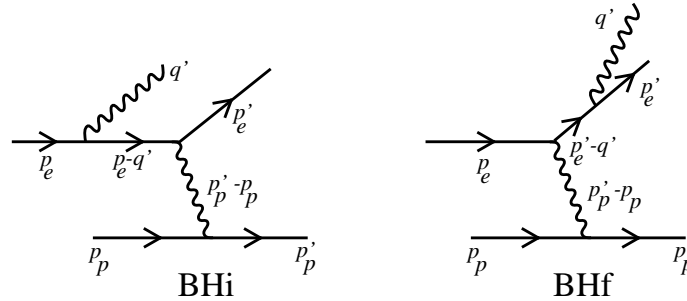


Figure E.1 - Graphe BHi

$$\mathcal{M}_{BHi} = \frac{-e^2}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \gamma^\nu \frac{(\not{p}'_e - \not{q}' + m_e)}{-2p'_e \cdot q'} \not{q}'^* u(p_e, s_e) \quad (\text{E.1})$$

Dans tout ce qui suit, J_ν représente le courant au vertex hadronique :

$$J_\nu = -ie \bar{N}(p'_p, s'_p) \Gamma_\nu N(p_p, s_p) \quad (\text{E.2})$$

avec Γ_ν défini dans l'annexe B page 243.

$$\mathcal{M}_{BHf} = \frac{-e^2}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \not{q}'^* \frac{(\not{p}'_e - \not{q}' + m_e)}{2p'_e \cdot q'} \gamma^\nu u(p_e, s_e) \quad (\text{E.3})$$

E.2 Graphe BHV1i

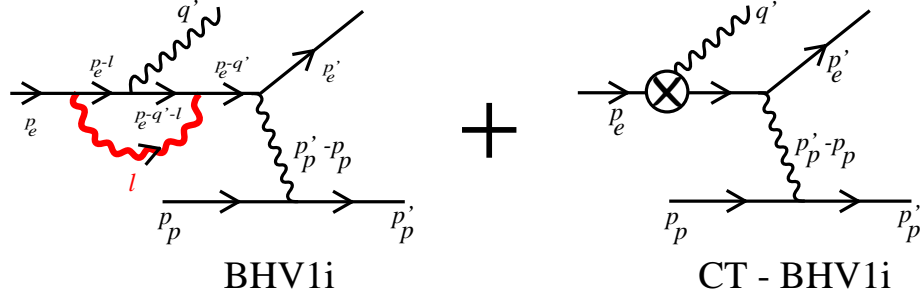


Figure E.2 - Graphe BHV1i et graphe “Contre-Terme” associé.

Terme divergent choisi dans la méthode d’addition-soustraction :

$$\mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \not{q}' \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l.p_e][l^2 - 2l.p_e][l^2]} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV1i} + C.T. = & \mathcal{M}_{BHi} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon_{IR}} - 3 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right\} \\ & - \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p'_e - p_e)^2} J_\nu \bar{u}(p'_e, s'_e) \gamma^\nu \frac{(\not{p}_e - \not{q}' + m_e)}{-2 p_e \cdot q'} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{Q^2} \left[\not{q} \not{q}' \not{q} \left(-1 + \frac{v^2+1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) (\not{p}'_e \not{q}' + \not{p}_e \not{q}') \right] \right. \\ & - 4 \int_0^1 x_3^2 dx_3 \int_0^1 x_2 dx_2 \int_0^1 dx_1 \\ & \cdot \left[\left(\frac{1}{A^i} \not{q}' + \frac{1}{(A^d)^2} P^i \not{q}' P^i \right) (P^i \cdot (q - q') + p_e \cdot q') \right. \\ & \left. - \frac{1}{2A^i} ((\not{q} - \not{q}') \not{P}^i + \not{P}^i (\not{q} - \not{q}')) \right] \\ & - 2 \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{1}{B_1^i} \\ & \cdot \left[y(\not{p}_e - \not{q}'x) \not{q}'(\not{p}_e - \not{q}') + y \not{p}_e \not{q}'(\not{p}_e - \not{q}'x) \right. \\ & \left. \left. + 4m_e(\varepsilon^* \cdot p_e)(1-y) - \not{p}_e \not{q}'(\not{p}_e - \not{q}') - m_e^2 \not{q}' \right] \right\} u(p_e, s_e) \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P^i &= (p_e - q')(1 - x_3) + (p_e - q x_1) x_3 x_2 \\ &= x_3 [x_2 (p_e - q x_1) - (p_e - q')] + (p_e - q') \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$A^i = 2 p_e \cdot q' (1 - x_3) + (P^i)^2 \quad (\text{E.7})$$

$$B_1^i = 2 p_e \cdot q' x (1 - y) + m_e^2 y \quad (\text{E.8})$$

Intégration :

Ce graphe ne permet pas la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse. La première intégration ne nécessite donc pas de prolongement analytique de la fonction dans le plan complexe.

On choisit comme premières variables d'intégration x_1 et x . On développe alors A^i selon x_1 et B_1^i selon x :

$$A^i = a \mathbf{x}_1^2 + b \mathbf{x}_1 + c \quad (\text{E.9})$$

avec :

$$a = q^2 (x_2 x_3)^2 \quad (\text{E.10})$$

$$b = -q^2 (x_2 x_3)^2 - 2q(p_e - q')(1 - x_3)x_2 x_3 \quad (\text{E.11})$$

$$c = m_e^2 (1 - x_3 + x_2 x_3)^2 + 2p_e q' x_3 (1 - x_3)(1 - x_2) \quad (\text{E.12})$$

$$B_1^i = a \mathbf{x} + b \quad (\text{E.13})$$

avec :

$$a = 2p_e q' (1 - y) \quad (\text{E.14})$$

$$b = m_e^2 y \quad (\text{E.15})$$

E.3 Graphe BHV1f

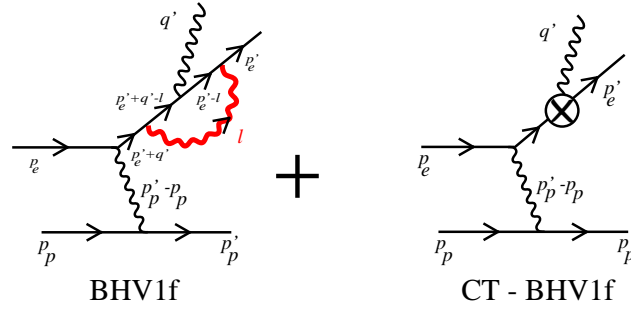


Figure E.3 - Graphe *BHV1f* et graphe “Contre-Terme” associé.

Terme divergent choisi dans la méthode d’addition-soustraction :

$$\mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \not{\epsilon}^* \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot p'_e][l^2 - 2l \cdot p_e][l^2]} \quad (\text{E.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV1f} + C.T. = & \mathcal{M}_{BHf} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon_{IR}} - 3 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right\} \\ & - \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \\ & \bar{u}(p'_e, s'_e) \left\{ \frac{1}{Q^2} \left[\not{q} \not{\epsilon}^* \not{q} \left(-1 + \frac{v^2+1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) (\not{p}'_e \not{\epsilon}^* \not{p}_e + \not{p}_e \not{\epsilon}^* \not{p}'_e) \right] \right. \\ & + 4 \int_0^1 x_3^2 dx_3 \int_0^1 x_2 dx_2 \int_0^1 dx_1 \\ & \cdot \left[\left(\frac{1}{A^f} \not{\epsilon}^* + \frac{1}{(A^f)^2} \not{P}^f \not{\epsilon}^* \not{P}^f \right) (P^f \cdot (q - q') + p'_e \cdot q') \right. \\ & \left. - \frac{1}{2A^f} ((\not{q} - \not{q}') \not{\epsilon}^* \not{P}^f + \not{P}^f \not{\epsilon}^* (\not{q} - \not{q}')) \right] \\ & - 2 \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{1}{B_1^f} \\ & \cdot \left[y(\not{p}'_e + \not{q}') \not{\epsilon}^* (\not{p}'_e - \not{q}') x + y(\not{p}'_e + \not{q}') \not{\epsilon}^* (\not{p}'_e + 4m_e(\varepsilon^* \cdot p'_e)(1-y) \right. \\ & \left. - (\not{p}'_e + \not{q}') \not{\epsilon}^* \not{p}'_e - m_e^2 \not{\epsilon}^* \right] \left. \right\} \cdot \frac{(\not{p}'_e - \not{q}' + m_e)}{-2p'_e \cdot q'} \gamma^\nu u(p_e, s_e) \quad (\text{E.17}) \end{aligned}$$

avec

$$P^f = (p'_e + q')(1 - x_3) + (p'_e + q x_1) x_3 x_2 \quad (\text{E.18})$$

$$A^f = -2p'_e \cdot q'(1 - x_3) + (P^f)^2 \quad (\text{E.19})$$

$$B_1^f = -2p'_e \cdot q' x(1 - y) + m_e^2 y \quad (\text{E.20})$$

Intégration :

Ce graphe permet la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse. La première intégration requière un prolongement analytique de la fonction dans le plan complexe.

On choisit comme premières variables d'intégration x_2 et x . On développe alors A^f selon x_2 et B_1^f selon x :

$$A^f = a \mathbf{x}_2^2 + b \mathbf{x}_2 + c \quad (\text{E.21})$$

avec :

$$a = x_3^2 [-q^2 x_1 (1 - x_1) + m_e^2] \quad (\text{E.22})$$

$$b = 2 x_3 (1 - x_3) [q (p'_e + q') x_1 + p'_e q' + m_e^2] \quad (\text{E.23})$$

$$c = m_e^2 (1 - x_3)^2 - 2 p'_e q' x_3 (1 - x_3) \quad (\text{E.24})$$

$$B_1^f = a \mathbf{x} + b \quad (\text{E.25})$$

avec :

$$a = 2 p'_e q' (1 - y) \quad (\text{E.26})$$

$$b = m_e^2 y \quad (\text{E.27})$$

E.4 Graphe BHV2i

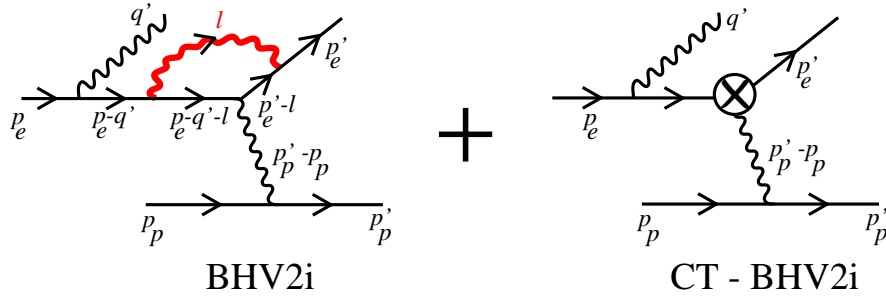


Figure E.4 - Graphe BHV2i et graphe “Contre-Terme” associé.

Terme divergent choisi dans la méthode d’addition-soustraction :

$$\mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \gamma^\nu \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot p_e'] [l^2 - 2l \cdot p_e] [l^2]} \quad (\text{E.28})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV2i} + C.T. = & \mathcal{M}_{BHi} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon_{IR}} - 3 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right\} \\ & - \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \bar{u}(p'_e, s'_e) \left\{ \frac{1}{Q^2} \left[\not{q} \gamma^\nu \not{q} \left(-1 + \frac{v^2+1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\not{p}'_e \gamma^\nu \not{p}_e + \not{p}_e \gamma^\nu \not{p}'_e) \frac{1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \right. \\ & - 4 \int_0^1 x_3^2 dx_3 \int_0^1 x_2 dx_2 \int_0^1 dx_1 \\ & \cdot \left[\left(\frac{1}{A^i} \gamma^\nu + \frac{1}{(A^d)^2} P^i \gamma^\nu P^i (p_e - P^i) \cdot q' \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2A^i} (\not{q}' \gamma^\nu P^i + P^i \gamma^\nu \not{q}') \right] \\ & - 2 \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{1}{B_2^i} \\ & \cdot \left[y (\not{p}_e - \not{q}') \gamma^\nu (\not{p}'_e + \not{q} - \not{q}') x + y (\not{p}'_e + (\not{q} - \not{q}') x) \gamma^\nu \not{p}'_e + 4m_e (1-y) (p'_e)^\nu \right. \\ & \left. - (\not{p}_e - \not{q}') \gamma^\nu \not{p}'_e - m_e^2 \gamma^\nu \right] \left. \right\} \frac{(\not{p}_e - \not{q}' + m_e)}{-2p_e \cdot q'} \not{q}'^* u(p_e, s_e) \quad (\text{E.29}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} B_2^i = & m_e^2 y + x^2 y (q - q')^2 \\ & + 2xy p'_e \cdot (q - q') + 2x p_e \cdot q' \quad (\text{E.30}) \end{aligned}$$

Intégration :

Ce graphe ne permet pas la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse. La première intégration ne nécessite donc pas de prolongement analytique de la fonction dans le plan complexe.

On choisit comme premières variables d'intégration x_1 et y . On développe alors A^i selon x_1 (cf. graphe "BHV1i" page 261) et B_2^i selon y :

$$B_2 d = a \mathbf{y} + b \quad (\text{E.31})$$

avec :

$$a = x^2 (q^2 - 2qq') + 2xp_e'(q - q') + m_e^2 \quad (\text{E.32})$$

$$b = 2p_e q' x \quad (\text{E.33})$$

E.5 Graphe BHV2f

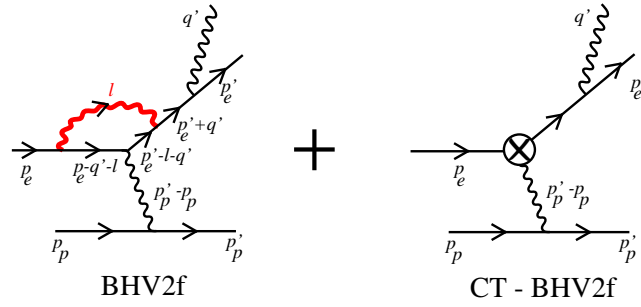


Figure E.5 - Graphe BHV2f et graphe “Contre-Terme” associé.

Terme divergent choisi dans la méthode d’addition-soustraction :

$$\mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \gamma^\nu \not{l} \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot p'_e][l^2 - 2l \cdot p_e][l^2]} \quad (\text{E.34})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV2f} + C.T. = & \mathcal{M}_{BHf} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon_{IR}} - 3 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right\} \\ & - \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \bar{u}(p'_e, s'_e) \not{q}' \frac{\not{p}'_e + \not{q}' + m_e}{2p'_e q'} \\ & \left\{ \frac{1}{Q^2} \left[\not{q} \gamma^\nu \not{q} \left(-1 + \frac{v^2 + 1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\not{p}'_e \gamma^\nu \not{p}_e + \not{p}_e \gamma^\nu \not{p}'_e) \frac{1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \right. \\ & + 4 \int_0^1 x_3^2 dx_3 \int_0^1 x_2 dx_2 \int_0^1 dx_1 \\ & \cdot \left[\left(\frac{1}{A^f} \gamma^\nu + \frac{1}{(A^f)^2} \not{p}^f \gamma^\nu \not{p}^f \right) ((\not{p}'_e - \not{p}^f) \cdot q') \right. \\ & \left. + \frac{1}{2A^f} (\not{q}' \gamma^\nu \not{p}^f + \not{p}^f \gamma^\nu \not{q}') \right] \\ & - 2 \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{1}{B_2^f} \\ & \cdot \left[y \not{p}_e \gamma^\nu (\not{p}_e - (\not{q} - \not{q}')x) + y (\not{p}_e - (\not{q} - \not{q}')x) \gamma^\nu (\not{p}'_e + \not{q}') \right. \\ & \left. \left. + 4m_e(1-y)(p_e)^\nu - \not{p}_e \gamma^\nu (\not{p}'_e + \not{q}') - m_e^2 \gamma^\nu \right] \right\} u(p_e, s_e) \quad (\text{E.35}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} B_2^f = & m_e^2 y + x^2 y (q - q')^2 \\ & - 2xy p_e \cdot (q - q') - 2x p'_e \cdot q' \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Intégration :

Ce graphe permet la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse. La première intégration requière un prolongement analytique de la fonction dans le plan complexe.

On choisit comme premières variables d'intégration x_2 et y . On développe alors A^f selon x_2 (cf. graphe "BHV1f" page 263) et B_2^f selon y :

$$B_2^f = a \mathbf{y} + b \quad (\text{E.37})$$

avec :

$$a = x^2 (q^2 - 2 q q') - 2 x p_e (q - q') + m_e^2 \quad (\text{E.38})$$

$$b = -2 p_e' q' x \quad (\text{E.39})$$

BHV3i

Terme divergent choisi dans la méthode d'addition-soustraction :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{BHV3i} = & \mathcal{M}_{BHi} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{IR}} \frac{v^2+1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right. \\
& + \frac{v^2+1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \ln \left(\frac{v^2-1}{4v^2} \right) \\
& + \frac{v^2+1}{v} \left[S_p \left(\frac{v+1}{2v} \right) - S_p \left(\frac{v-1}{2v} \right) \right] \Big\} \\
& - \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \int_0^1 y dy \int_0^1 x_2 dx_2 \int_0^1 dx_1 \\
& \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \left\{ \gamma_\nu \frac{\not{p}_e - \not{q}' + m_e}{-2p'_e q'} \not{\epsilon}^* 4(p_e \cdot p'_e) \right. \\
& \cdot \left[\frac{2}{C_y} + \frac{1}{C_y^2} (-y(P_{x_1 x_2}^i)^2 + 2P_{x_1 x_2}^i (p_e - q')) \right] \\
& + \frac{2}{C_y} \left[\gamma^\nu \not{\epsilon}^* \not{p}'_e + \not{p}_e \gamma^\nu \not{\epsilon}^* - \gamma^\nu (\not{p}_e - \not{q}' - y \not{P}_{x_1 x_2}^i) \not{\epsilon}^* - 4m_e \epsilon^{*\nu} \right. \\
& \quad \left. + y \not{\epsilon}^* \gamma^\nu \not{P}_{x_1 x_2}^i + y \not{P}_{x_1 x_2}^i \not{\epsilon}^* \gamma^\nu \right] \\
& + \frac{1}{C_y^2} \left[-4(p_e \cdot p'_e) \gamma^\nu \not{P}_{x_1 x_2}^i \not{\epsilon}^* - 2\gamma^\nu (\not{p}_e - \not{q}' - y \not{P}_{x_1 x_2}^i + m_e) \not{\epsilon}^* \not{P}_{x_1 x_2}^i \not{p}'_e \right. \\
& \quad - 2 \not{p}_e \not{P}_{x_1 x_2}^i \gamma^\nu (\not{p}_e - \not{q}' - y \not{P}_{x_1 x_2}^i + m_e) \not{\epsilon}^* \\
& \quad + y \not{P}_{x_1 x_2}^i [-2 \not{\epsilon}^* (\not{p}_e - \not{q}' - y \not{P}_{x_1 x_2}^i) \gamma^\nu + 4m_e \epsilon^{*\nu}] \\
& \quad \left. \cdot \not{P}_{x_1 x_2}^i \right] \Big\} u(p_e, s_e)
\end{aligned} \tag{E.41}$$

$$P_{x_1 x_2}^i = (q - q' x_1) x_2 + p'_e \quad (\text{E.42})$$

$$C_y = 2 p_e q' x_1 x_2 + y [m_e^2 + 2 p_e' (q - q' x_1) x_2 + (q^2 - 2 q q' x_1) x_2^2] \quad (\text{E.43})$$

$$= 2 p_{\epsilon} q' x_1 x_2 + y (P_{x_1 x_2}^i)^2 \quad (\text{E.44})$$

Intégration :

Ce graphe ne permet pas la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse. La première intégration ne nécessite donc pas de prolongement analytique de la fonction dans le plan complexe.

On choisit comme première variable d'intégration x_3 . On développe alors C_y selon x_3 : Développement de C_y selon x_3 :

$$C_y = a \, \mathbf{x}_3 + b \quad (\text{E.45})$$

avec :

$$a = m_e^2 + q^2 x_2 (x_2 - 1) - 2 x_1 x_2 (p'_e q' + q q' x_2) \quad (\text{E.46})$$

$$b = 2 p_e q' x_1 x_2 \quad (\text{E.47})$$

E.7 Graphe BHV3f

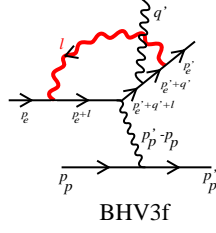


Figure E.7 - Graphe BHV3f.

Terme divergent choisi dans la méthode d'addition-soustraction :

$$\mu^{(4-D)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{(4 p_e \cdot p'_e) \not{\epsilon}^*(q') (\not{p}'_e + \not{q}' + m_e) \gamma^\nu}{[l^2 + 2 l \cdot p'_e][l^2 + 2 l \cdot p_e][l^2][2 p'_e \cdot q']} \quad (\text{E.48})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{BHV3f} = & \mathcal{M}_{BHf} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{IR}} \frac{v^2 + 1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right. \\ & + \frac{v^2 + 1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \ln \left(\frac{v^2 - 1}{4v^2} \right) \\ & + \frac{v^2 + 1}{v} \left[S_p \left(\frac{v+1}{2v} \right) - S_p \left(\frac{v-1}{2v} \right) \right] \Big\} \\ & - \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p'_p - p_p)^2} J_\nu \int_0^1 y dy \int_0^1 x_2 dx_2 \int_0^1 dx_1 \\ & \cdot \bar{u}(p'_e, s'_e) \left\{ \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}'_e - \not{q}' + m_e)}{2 p'_e q'} \gamma^\nu 4(p_e \cdot p'_e) \right. \\ & \cdot \left[\frac{2}{D_y} + \frac{1}{D_y^2} (-y(P_{x_1 x_2}^f)^2 + 2 P_{x_1 x_2}^f (p'_e - q')) \right] \\ & + \frac{2}{D_y} \left[\not{\epsilon}^* \gamma^\nu \not{p}'_e + \not{p}'_e \not{\epsilon}^* \gamma^\nu - \not{\epsilon}^* (\not{p}'_e - \not{q}' - y \not{P}_{x_1 x_2}^f) \gamma^\nu - 4 m_e \epsilon^{*\nu} \right. \\ & \quad \left. + y \not{P}_{x_1 x_2}^f \gamma^\nu \not{\epsilon}^* + y \gamma^\nu \not{\epsilon}^* \not{P}_{x_1 x_2}^f \right] \\ & + \frac{1}{D_y^2} \left[-4(p_e \cdot p'_e) \not{\epsilon}^* \not{P}_{x_1 x_2}^f \gamma^\nu - 2 \not{\epsilon}^* (\not{p}'_e - \not{q}' - y \not{P}_{x_1 x_2}^f + m_e) \gamma^\nu \not{P}_{x_1 x_2}^f \not{p}'_e \right. \\ & \quad - 2 \not{p}'_e \not{P}_{x_1 x_2}^f \not{\epsilon}^* (\not{p}'_e + \not{q}' - y \not{P}_{x_1 x_2}^f + m_e) \gamma^\nu \\ & \quad + y \not{P}_{x_1 x_2}^f [-2 \gamma^\nu (\not{p}'_e - \not{q}' - y \not{P}_{x_1 x_2}^f) \not{\epsilon}^* + 4 m_e \epsilon^{*\nu}] \\ & \quad \left. \cdot \not{P}_{x_1 x_2}^f \right] \Big\} u(p_e, s_e) \quad (\text{E.49}) \end{aligned}$$

avec

$$P_{x_1 x_2}^f = -(q - q' x_1) x_2 + p_e \quad (\text{E.50})$$

$$D_y = -2 p'_e \cdot q' x_1 x_2 + y [m_e^2 - 2 p_e \cdot (q - q' x_1) x_2 + (q^2 - 2 q \cdot q' x_1) x_2^2] \quad (\text{E.51})$$

$$= 2 p_e \cdot q' x_1 x_2 + y (P_{x_1 x_2}^f)^2 \quad (\text{E.52})$$

Intégration :

Ce graphe permet la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse. La première intégration requière un prolongement analytique de la fonction dans le plan complexe.

Compte-tenu de l'expression de D_y , il est judicieux de choisir y comme première variable d'intégration. En fonction de y , D_y s'écrit sous la forme simple :

$$D_y = a \mathbf{y} + b + i\varepsilon \quad (\text{E.53})$$

avec :

$$a = m_e^2 + q^2 x_2 (x_2 - 1) + 2 x_1 x_2 (p_e q' - q q' x_2) \quad (\text{E.54})$$

$$b = -2 p'_e q' x_1 x_2 \quad (\text{E.55})$$

E.8 Graphes BH2i et BH2f

En comparant les amplitudes des graphes BH2i et Bh2f à celles des graphes Bh1i et BH3f respectivement, on montre que les graphes BH2i et BH2f peuvent être négligés dans la limite des photons mous.

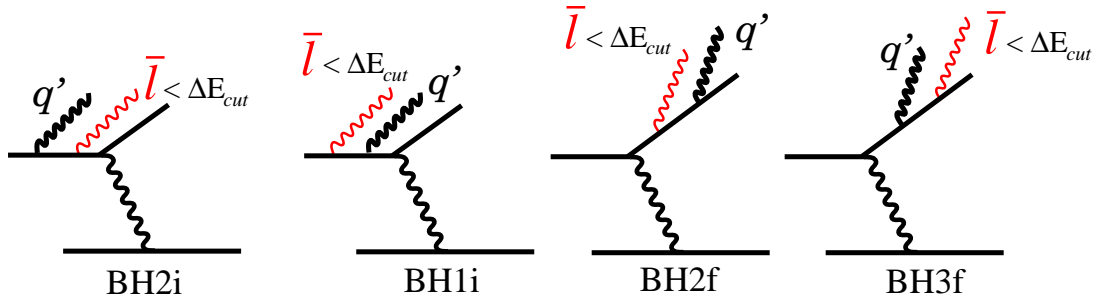


Figure E.8 -

Considérons le graphe BH2i :

$$\mathcal{M}_{BH2i} = ie^3 \frac{J_\beta}{(p' - p)^2} \frac{\gamma^\beta [(\not{p}_e - \not{q}' - \not{l}) + m_e] \not{\epsilon}^*(l) [(\not{p}_e - \not{q}') + m_e] \not{\epsilon}^*(q')}{[(p_e - q' - l)^2 - m_e^2] [(p_e - q')^2 - m_e^2]} \quad (\text{E.56})$$

$$= ie^3 \frac{J_\beta}{(p' - p)^2} \frac{\gamma^\beta [(\not{p}_e - \not{q}' - \not{l}) + m_e] \not{\epsilon}^*(l) [(\not{p}_e - \not{q}') + m_e] \not{\epsilon}^*(q')}{[l^2 - 2p_e q' - 2l(p_e - q')] [-2p_e q']} \quad (\text{E.57})$$

• Dans la limite des photons mous, on néglige l devant p_e . Pour $\vec{p}_e \cdot \vec{q}' \neq 0$ et $\bar{l} \ll \vec{q}'$, on obtient :

$$\mathcal{M}_{BH2i} = ie^3 \frac{J_\beta}{(p' - p)^2} \frac{\gamma^\beta [(\not{p}_e - \not{q}') + m_e] \not{\epsilon}^*(l) [(\not{p}_e - \not{q}') + m_e] \not{\epsilon}^*(q')}{[-2p_e q'] [-2p_e q']} \quad (\text{E.58})$$

Soit $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{BH2i}$ la section efficace correspondant au graphes BH2i :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{BH2i} \propto \mathcal{S}(E, p_e, p'_e, m_e, q') \int_0^{\Delta E_{cut}/E} \bar{l}' d\bar{l}' \quad (E.59)$$

avec \mathcal{S} une expression analytique indépendante de \bar{l}' et ayant les dimensions d'une section efficace.

Dans la limite des photons mous et dans les conditions pré-citées, la section efficace associée au processus décrit par le graphe BH2i ne présente pas de divergence infrarouge. La correction présente un terme en $(\Delta E_{cut}/E)^2$.

Considérons maintenant le graphes BH1i :

$$\mathcal{M}_{BH1i} = ie^3 \frac{J_\beta}{(p' - p)^2} \frac{\gamma^\beta [(\not{p}'_e - \not{q}' - \not{l}) + m_e] \not{\epsilon}^*(l) [(\not{p}'_e - \not{l}) + m_e] \not{\epsilon}^*(q')}{[(p_e - q' - l)^2 - m_e^2] [(p_e - l)^2 - m_e^2]} \quad (E.60)$$

$$= ie^3 \frac{J_\beta}{(p' - p)^2} \frac{\gamma^\beta [(\not{p}'_e - \not{q}' - \not{l}) + m_e] \not{\epsilon}^*(l) [(\not{p}'_e - \not{q}') + m_e] \not{\epsilon}^*(q')}{[l^2 - 2p_e q' - 2l(p_e - q')] [-2p_e l]} \quad (E.61)$$

• Dans la limite des photons mous, on néglige l devant p_e . Pour $\vec{p}_e \cdot \vec{q}' \neq 0$ et $\bar{l} \ll \vec{q}'$, on obtient :

$$\mathcal{M}_{BH1i} = ie^3 \frac{J_\beta}{(p' - p)^2} \frac{\gamma^\beta [(\not{p}'_e - \not{q}') + m_e] \not{\epsilon}^*(l) [(\not{p}'_e - \not{q}') + m_e] \not{\epsilon}^*(q')}{[-2p_e q'] [-2p_e l]} \quad (E.62)$$

Soit $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{BH1i}$ la section efficace correspondant au graphes BH1i :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{BH1i} \propto \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{BH1} \int_0^{\Delta E_{cut}/E} \frac{d\bar{l}'}{\bar{l}'} \mathcal{T}(p_e, p'_e, m_e, \hat{l}', q') \quad (E.63)$$

avec $\left[\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right]_{BH1}$ la section efficace associée au Bethe-Heitler (cf. page 259) et \mathcal{T} un terme indépendant de \bar{l}' contenant une intégration sur l'angle solide ouvert au photon réel d'énergie \bar{l}' . ($\hat{l}' = \vec{l}'/\bar{l}'$).

Dans la limite des photons mous et dans les conditions pré-citées, la section efficace correspondant au processus décrit par le graphe BH1i présente une divergence logarithmique infrarouge. Après intégration sur \bar{l}' , la correction finie dépend logarithmiquement de $(\Delta E_{cut}/E)$.

Conclusion :

Aux énergies auxquelles on travaille ($855\text{MeV} < E < 4\text{GeV}$, $\Delta E_{cut} \simeq 20\text{MeV}$) et dans les conditions cinématiques choisies ($\widehat{(\vec{p}_e, \vec{q}')} \neq 0$, $\bar{l} \ll q'$), $(\Delta E_{cut}/E) \ll 1$ et par conséquent :

$$(\Delta E_{cut}/E)^2 \ll \left| \ln \left(\frac{\Delta E_{cut}}{E} \right) \right|$$

Il est donc légitime de négliger le graphe BH2i devant le graphe BH1i. Une comparaison similaire des graphes BH2f et BH3f nous conduirait à négliger BH2f devant BH3f.

Remarquons que le raisonnement suppose que le photon “VCS” (q') n'est pas émis dans la direction d'un des électrons et que son énergie est beaucoup plus grande que celle du photon réel supplémentaire rayonné. Ceci est réalisé dans les conditions expérimentales choisies pour déterminer les Polarisabilités Généralisées.

Annexe F

Méthode basée sur la précession du spin d'électrons polarisés

Commençons par calculer l'évolution dans le temps de l'impulsion et du spin d'un électron se déplaçant dans un champ magnétique statique.

Cas général :

Si un vecteur \vec{X} vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = -\alpha \vec{X} \wedge \vec{A} \quad (\alpha : \text{une constante et la direction de } \vec{A} \text{ est fixe}) \quad (\text{F.1})$$

l'évolution de \vec{X} au cours du temps sera un mouvement de précession autour de la direction de \vec{A} avec une pulsation ω :

$$\omega = \alpha |\vec{A}| \quad (\text{F.2})$$

Cas de l'impulsion d'un électron :

Un électron en mouvement dans un champ magnétique statique \vec{B} subit la force de Lorentz. L'impulsion \vec{p} vérifie donc l'équation différentielle :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{-e}{m_e \gamma} \vec{p} \wedge \vec{B} \quad (\text{F.3})$$

avec $\gamma = E_e/m_e$, E_e l'énergie du faisceau, m_e la masse au repos de l'électron et e la valeur absolue de sa charge.

En comparant les équations (F.3) et (F.1), on déduit que l'impulsion précesse autour de \vec{B} à une pulsation ω_p définie par la relation (F.2) :

$$\omega_p = \frac{e}{m_e \gamma} |\vec{B}| \quad (\text{F.4})$$

Pour se représenter la précession de l'impulsion dans une déviation magnétique il faut se placer dans un référentiel lié à l'électron. Par exemple, la trajectoire en hélice d'une

particule chargée dans un champ uniforme est une conséquence de cette précession.

Cas du spin d'un électron :

Le spin d'un électron dans un champ \vec{B} perpendiculaire à sa vitesse $\vec{\beta}$, traité de façon classique, vérifie l'équation différentielle [9] [10]:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{-e}{m_e} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\mu'}{\mu_B} \right) \vec{S} \wedge \vec{B} \quad (\text{F.5})$$

avec $\mu' = \mu - \mu_B$ la partie anormale du moment magnétique de l'électron μ et μ_B le magnéton de Bohr ($\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m_e}$, $\mu'/\mu_B \simeq 0.00115965$). Bien que le spin soit un objet quantique, le traitement classique fait ici reste valable.

Le spin d'un électron plongé dans un champ magnétique statique $\vec{B} - \vec{\beta}$ précesse donc autour de \vec{B} à une pulsation ω_s :

$$\omega_s = \frac{e}{m_e} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\mu'}{\mu_B} \right) |\vec{B}| \quad (\text{F.6})$$

Principe de la méthode :

En soustrayant ω_p à ω_s , on obtient :

$$\omega_s - \omega_p = \frac{e}{m_e} \frac{\mu'}{\mu_B} |\vec{B}| \quad (\text{F.7})$$

et en utilisant la relation (F.4), on peut s'affranchir de la connaissance du champ magnétique \vec{B} :

$$\omega_s - \omega_p = \gamma \frac{\mu'}{\mu_B} \omega_p \quad (\text{F.8})$$

On se place maintenant dans une déviation magnétique où le champ magnétique \vec{B} est de module variable mais de direction verticale. Les pulsations se réfèrent donc à des angles mesurés dans le plan horizontal.

En intégrant par rapport au temps cette dernière équation, on pourra exprimer γ en fonction de θ_s et θ_p , les angles de précession du spin et de l'impulsion des électrons acquis dans la déviation magnétique :

$$\boxed{\gamma = \frac{E_e}{m_e} = \frac{(\theta_s - \theta_p)}{\theta_p} \frac{\mu_B}{\mu'}} \quad (\text{F.9})$$

En intégrant sur le temps les relations (F.4), (F.6) et (F.8), il est intéressant de souligner que l'énergie peut être obtenue par la connaissance de deux des trois quantités suivantes : θ_s , θ_p et $\int B_{\perp} dl_{\perp}$. En particulier, on notera que l'utilisation du couple $(\theta_p, \int B_{\perp} dl_{\perp})$ conduit à la méthode ARC ne nécessitant pas l'emploi d'électrons polarisés mais requérant la mesure de l'intégrale de champ magnétique le long de la déviation. La

méthode proposée ici utilise θ_s et θ_p , ce qui a l'avantage de mesurer l'énergie indépendamment de toute connaissance du champ magnétique. Nous allons maintenant appliquer la relation (F.9) à chacun des halls A et C et établir une méthode qui permettrait de mesurer l'énergie du faisceau en utilisant les polarimètres Möller existants à l'entrée de chacun d'eux.

Pour le hall A :

$$\theta_{sA} - \theta_{pA} = \frac{\mu'}{\mu_B} \gamma \theta_{pA} \quad (\text{F.10})$$

Pour le hall C :

$$\theta_{sC} - \theta_{pC} = \frac{\mu'}{\mu_B} \gamma \theta_{pC} \quad (\text{F.11})$$

La différence de (F.10) et (F.11) conduit à :

$$(\theta_{sA} - \theta_{pA}) - (\theta_{sC} - \theta_{pC}) = \frac{\mu'}{\mu_B} \gamma (\theta_{pA} - \theta_{pC}) \quad (\text{F.12})$$

où :

θ_{pA} (resp. θ_{pC}) : angle algébrique dont est dévié le faisceau d'électrons entre la sortie de l'accélérateur et le hall A (resp. C).

θ_{sA} (resp. θ_{sC}) : angle algébrique de précession du spin sur le même trajet.

Soit θ_{iA} (resp. θ_{iC}) l'angle dont il faut tourner le spin des électrons au niveau de l'injecteur pour qu'à l'entrée du hall A (resp. C), la direction du spin soit perpendiculaire à celle de l'impulsion et du même côté de celle-ci (par exemple à droite pour chacun des 2 halls). On a les relations :

$$\theta_{iA} + \theta_x + \theta_{sA} = \theta_{pA} + \frac{\pi}{2} \quad (\text{F.13})$$

$$\theta_{iC} + \theta_x + \theta_{sC} = \theta_{pC} + \frac{\pi}{2} \quad (\text{F.14})$$

avec θ_x l'angle total de précession du spin dans l'accélérateur, mal connu à priori.

Par soustraction de (F.13) et (F.14), on obtient :

$$\theta_{iA} - \theta_{iC} = (\theta_{pA} - \theta_{sA}) - (\theta_{pC} - \theta_{sC}) \quad (\text{F.15})$$

L'équation (F.12) devient :

$$\theta_{iC} - \theta_{iA} = \frac{\mu'}{\mu_B} \gamma (\theta_{pA} - \theta_{pC}) \quad (\text{F.16})$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\boxed{E_e = m_e \frac{\mu_B}{\mu'} \frac{(\theta_{iC} - \theta_{iA})}{(\theta_{pA} - \theta_{pC})} = m_e \frac{\mu_B}{\mu'} \frac{(\theta_{iC} - \theta_{iA})}{\theta_{AC}}} \quad (\text{F.17})$$

avec θ_{AC} l'angle absolu entre les directions du faisceau dans le hall A et dans le hall C et $\frac{\mu_B}{\mu'} = 862.3291$.

Nous avons donc montré qu'en utilisant des électrons polarisés on pouvait remonter à l'énergie sans avoir besoin de connaître l'intégrale de champ magnétique le long de la trajectoire du faisceau.

Concernant la mesure de l'angle absolu entre les directions du faisceau dans les halls A et C, on signalera que pour la méthode ARC nous avons déjà dû équiper le tunnel reliant l'accélérateur au hall A pour mesurer θ_{pA} en absolu avec une précision de quelques 10^{-5} .

Un calcul d'erreur montre que la précision nécessaire sur la mesure de la différence entre les angles du spin au niveau de l'injecteur, correspondant à une hélicité nulle sur le polarimètre du hall A et sur le polarimètre du hall C, est d'autant plus relâchée que l'énergie du faisceau sera grande. Pour $E_e = 4\text{GeV}$, une erreur donnée sur θ_{iC} ou θ_{iA} contribuera 9 fois moins que la même erreur sur θ_{AC} ¹.

Une des difficultés de ces méthodes s'appuyant sur la précession du spin d'électrons polarisés, soulignée dans le rapport [5], est liée au passage du faisceau dans des quadripôles qui auront pour effet de dévier verticalement les électrons qui sont écartés en vertical de l'axe du quadripôle. Dans ce cas, la précession n'aura plus forcément lieu dans le plan horizontal et la relation liant l'angle de déviation du faisceau à l'angle de précession du spin devient approximative. Bien que la déviation magnétique puisse être réglée en mode dispersif, il subsistera des quadripôles en service entre la sortie de l'accélérateur et le début de la déviation.

Cette méthode utilisant les polarimètres Möller est destructive et nécessite l'emploi d'un faisceau d'électrons polarisés envoyé simultanément dans les halls A et C. Par conséquent, si elle était retenue dans le futur, elle ne permettrait qu'un contrôle ponctuel des méthodes "ep" et ARC déjà installées ou en cours de l'être.

1. A $E_e = 4\text{GeV}$, $\theta_{AC} = 68.6^\circ$ et $(\theta_{iC} \text{ ou } \theta_{iA}) = 622.72^\circ$. En fait la différence $(\theta_{iC} \text{ ou } \theta_{iA})$ sera mesurée à $2k\pi$ près mais k , le nombre de tours manquants, sera facile à déterminer. Ainsi, une erreur absolue donnée sur θ_{iC} ou θ_{iA} doit se référer à 622.72° et la même erreur sur θ_{AC} doit se référer à 68.6° . Ceci explique que la tolérance absolue requise pour, d'une part la mesure de l'angle du spin (une erreur de 1.1mrad correspond à $\Delta E/E = 10^{-4}$) et, d'autre part la mesure précise de l'angle θ_{AC} (une erreur de 0.12mrad correspond à $\Delta E/E = 10^{-4}$).

Annexe G

Ligne faisceau du hall A

Elément	Identifiant	Distance à la cible (m)
BPM	IPM1C07	99.525
Quadripôle	MQA1C07	99.150
Dipôle correcteur vertical	MBC1C07V	98.611
Pompe ionique	VIP1C07	98.242
DEBUT DE L'ARC DE DEVIATION		
Profileurs à fil ARC #1	IHA1C07A	98.010
Profileurs à fil ARC #2	IHA1C07B	98.048
BPM	IPM1C08	93.425
Quadripôle	MQA1C08	93.050
Dipôle correcteur horizontal	MBC1C08H	92.707
Sextupôle	MSA1C08	92.405
Caméra	ITV1C08	92.212
Pompe ionique	VIP1C08	
Dipôle BA (3m)	MBA1C05	90.300
Quadripôle	MQA1C09	87.850
Dipôle correcteur vertical	MBC1C09V	87.507
Sextupôle	MSA1C09	87.205
Dipôle BA (3m)	MBA1C06	85.100
BPM	IPM1C10	83.025
Quadripôle	MQA1C10	82.650
Dipôle correcteur horizontal	MBC1C10H	82.307
Sextupôle	MSA1C10	82.005
Pompe ionique	VIP1C10	81.812
Dipôle BA (3m)	MBA1C07	79.900
Quadripôle	MQA1C11	77.450
Dipôle correcteur vertical	MBC1C11V	77.107
Sextupôle	MSA1C11	76.805

Tableau G.1 - Distance à la cible des centres des différents éléments constituant la ligne faisceau menant au hall A (suite pages suivantes). BPM (Beam Position Monitor) : mesure la position du barycentre du faisceau par un ensemble de 4 antennes Haute Fréquence.

Élément	Identifiant	Distance à la cible (m)
Convectron	VTC1C11	76.612
Dipôle BA (3m)	MBA1C08	74.700
BPM	IPM1C12	72.625
Quadripôle	MQA1C12	72.250
Dipôle correcteur horizontal	MBC1C12H	71.907
Sextupôle	MSA1C12	71.605
Pompe ionique	VIP1C12	71.412
Dipôle BA (3m)	MBA1C09	69.500
Quadripôle	MQA1C13	67.050
Dipôle correcteur vertical	MBC1C13V	66.707
Sextupôle	MSA1C13	66.405
Dipôle BA (3m)	MBA1C10	64.300
BPM	IPM1C14	62.225
Quadripôle	MQA1C14	61.850
Dipôle correcteur horizontal	MBC1C14H	61.507
Sextupôle	MSA1C14	61.205
Pompe ionique	VIP1C14	61.012
Dipôle BA (3m)	MBA1C11	59.100
Electrovanne	VBV1C15	
Pompe primaire	VRV1C15	
Quadripôle	MQA1C15	56.650
Dipôle correcteur vertical	MBC1C15V	56.307
Sextupôle	MSA1C145	56.005
Dipôle BA (3m)	MBA1C12	53.900
Pompe ionique	VIP1C16	
Convectron	VTC1C16	
BPM	IPM1C16	51.825
Quadripôle	MQA1C16	51.450
Dipôle correcteur horizontal	MBC1C16H	51.107
Electrovanne	VBV1C16	
FIN DE L'ARC DE DEVIATION		
Mur de protection (surface d'entrée)		50.707
Mur de protection (surface de sortie)		49.651
Caméra	ITV1C17	49.411
Quadripôle	MQA1C17	49.100
BPM	IPM1C18	48.650
Quadripôle	MQA1C18	48.300
Dipôle correcteur horizontal	MBC1C18H	47.957
Dipôle correcteur vertical	MBC1C18V	47.761
Profileur à fil ARC #3	IHA1C18A	47.381
Profileur à fil ARC #4	IHA1C18B	43.673
Quadripôle	MQA1C19	43.000
BPM	IPM1C20	42.550

Tableau G.2 - Description de la ligne faisceau menant au hall A (suite). Convectron : jauge de pression (jauge à vide).

Elément	Identifiant	Distance à la cible (m)
Quadripôle	MQA1C20	42.200
Dipôle correcteur horizontal	MBC1C20H	41.857
Dipôle correcteur vertical	MBC1C20V	41.661
Pompe ionique	VIP1C20	41.450
Début du polarimètre Compton		41.000
Fin du polarimètre Compton		25.500
Pompe ionique	VIP1C20A	34.500
Pompe ionique	VIP1C20B	29.500
Début du mesureur de courant	IBC1H00	24.500
Milieu du mesureur de courant	IUN1H00	
Fin du mesureur de courant	IBC1H00A	
Aimant d'agitation horizontale	MRA1H00H	23.000
Aimant d'agitation verticale	MRA1H00V	
Electrovanne	VBV1H00	22.053
Mesure e-p	VTP1H00A	21.650
Pompe ionique	VIP1H00A	20.000
Electrovanne	VBV1H01	19.020
Caméra	ITV1H01	18.938
BPM	IPM1H01	18.650
Quadripôle	MQA1H01	18.300
Dipôle correcteur horizontal	MAT1H01H	17.957
Dipôle correcteur vertical	MAT1H01V	17.761
Cible du polarimètre Moller		17.500
Quadripôle	MQM1H02	16.500
Pompe primaire	VRV1H02A	
Convectron	VTC1H02A	
Quadripôle	MQO1H03	15.415
Quadripôle	MQO1H03A	14.758
Dipôle Moller	MMA1H01	13.272
Pompe ionique	VTP1H03A	11.955
BLM	IBC1H03A	7.906
Electrovanne	VBV1H03A	7.786
BPM	IPM1H03A	7.524
Profileur à fil	IHA1H03A	7.353
Pompe ionique	VIP1H03B	4.486
Pompe ionique	VTC1H03A	
BPM	IPM1H03B	1.286
Profileur à fil	IHA1H03B	1.122
Electrovanne	VBV1H03B	0.953
Radiateur	ERR1H	0.726
Cible du hall A		0.000
Caméra	ITV1H03A	-23.863
Absorbeur de faisceau		-50.000

Tableau G.3 - Description de la ligne faisceau menant au hall A (suite et fin). BLM (Beam Loss Moniteur) : Photomultiplicateur contrôlant le taux de radiation afin de protéger les équipements sensibles aux radiations.

Annexe H

Contrôle-commande adopté pour le projet ARC : EPICS

EPICS (Experimental Physics and Industrial Control System) est un environnement informatique “temps réel” destiné au contrôle-commande et à l’acquisition de données. Il a été développé au laboratoire de Los Alamos en collaboration avec plusieurs autres centres de recherche américains dans les années 80 pour les grandes installations dédiées à la physique expérimentale. Devenu un standard en matière de système de contrôle commande, le laboratoire Jefferson l’a adopté pour CEBAF et par conséquent toutes les applications associées à l’accélérateur, dont la mesure d’énergie ARC¹. Dans cette annexe, je m’attacherai à décrire de manière générale et en termes simples ce qu’est EPICS. Etant donné que je n’ai pas été impliquée directement dans ce type de programmation, cette présentation ne sera que schématique.

EPICS est un ensemble d’outils logiciels permettant aux développeurs de créer les systèmes de contrôle-commande appropriés à leurs applications. Dans un système de contrôle-commande développé sous EPICS, on distinguera plusieurs types de matériels et logiciels : ceux “de terrain”, situés au plus proche de l’instrument à contrôler, ceux “de la salle de contrôle” et ceux qui assurent la communication entre les deux pôles précédemment cités.

H.1 Matériels et logiciels “de terrain”

L’appareil que l’on désire contrôler est connecté à différents modules électroniques (ADC², carte de commande moteur, ...) rangés dans un châssis, cf. figure (H.1). Le châssis ainsi que les modules électroniques sont basés sur la norme industrielle VME³. Le châssis est muni entre autres d’un module micro-processeur appelé IOC⁴. Cet IOC accède aux modules électroniques par bus VME et communique avec les ordinateurs des salles de contrôle par le réseau local Ethernet (ou LAN⁵). Nous détaillerons plus avant les logiciels implantés dans l’IOC dans la partie H.4.

1. Le contrôle-commande de la mesure d’énergie ARC a été réalisé par le groupe informatique du SIG (Service d’Instrumentation Générale) appartenant au DAPNIA.

2. ADC : Analogic to Digital Converter.

3. VME : Versa Module Europe

4. IOC : Input Ouput Controller.

5. LAN : Local Area Network.

H.2 Logiciels de communication

La communication entre le “terrain” et l’ordinateur de la salle de contrôle s’effectue sur le mode questions-réponses par l’intermédiaire d’un programme appelé “Channel Access” implanté d’une part dans l’IOC et d’autre part dans l’ordinateur de la salle de contrôle. Ces programmes “Channel Access” dialoguent entre eux *via* le réseau local, cf. figure (H.2).

H.3 Matériels et logiciels “de salles de contrôle”

Un utilisateur connecté à une station Unix peut communiquer avec un ou plusieurs des IOC de l’installation grâce à une interface opérateur (OPI) comportant un programme “Channel Access”. Pratiquement, l’utilisateur accède à une fenêtre graphique pouvant présenter des “boutons cliquables” de commande, des champs permettant la saisie de valeurs ou de caractères, des courbes représentant des données... On développe cette interface opérateur grâce à un logiciel (MEDM⁶ ou TCL/TK) possédant les fonctionnalités nécessaires à la création d’écrans interactifs ou “displays”.

H.4 Le contrôleur d’entrée/sortie : IOC

Ce module micro-processeur, situé dans le châssis VME, est véritablement le cerveau du système de contrôle-commande. Le système d’exploitation temps réel associé à ce micro-processeur est vxWorkx. L’IOC comprend toute la partie logicielle “de terrain” comprenant entre autres un programme “Channel Access”, la base de données, une couche logicielle appelée “device support” et si nécessaire un programme écrit en langage SNL⁷. On se reportera à la figure (H.2).

- Parmi les logiciels implantés dans l’IOC, la base de données est, sans aucun doute, l’élément clé car elle contient toutes les informations et programmes spécifiques à l’application que l’on veut contrôler. Les “briques” élémentaires de la base de données sont les enregistrements ou “records EPICS”. On désigne chacun des enregistrements par un nom unique sur tout le site de l’installation. Ces enregistrements comportent un ensemble de déclarations de champs (noms de variables). Ces champs peuvent être effectivement des noms de variables ou bien les noms de méthodes (fonctions) s’appliquant à ces variables. Chacun des enregistrements aura un type et un sous-type particulier selon les méthodes qu’il contient. Plusieurs enregistrements standards sont disponibles dans la librairie EPICS :
 - les enregistrements de type “Entrée/Sortie” rassemblant entre autres les enregistrements “Analog input”(Ai), “Analog output”(Ao) permettant la lecture et l’écriture de valeurs de champs, l’enregistrement “StepperMotor”, spécifique aux moteurs pas à pas contenant les champs vitesse (VELO), accélération (ACC)... ainsi que le nom du “device support” qui fera l’interface avec le moteur *via* la carte de commande.

6. MEDM : Motif-based Editor Display Manager.

7. SNL : State Notation Language, est une surcouche du langage C permettant de décrire des états.

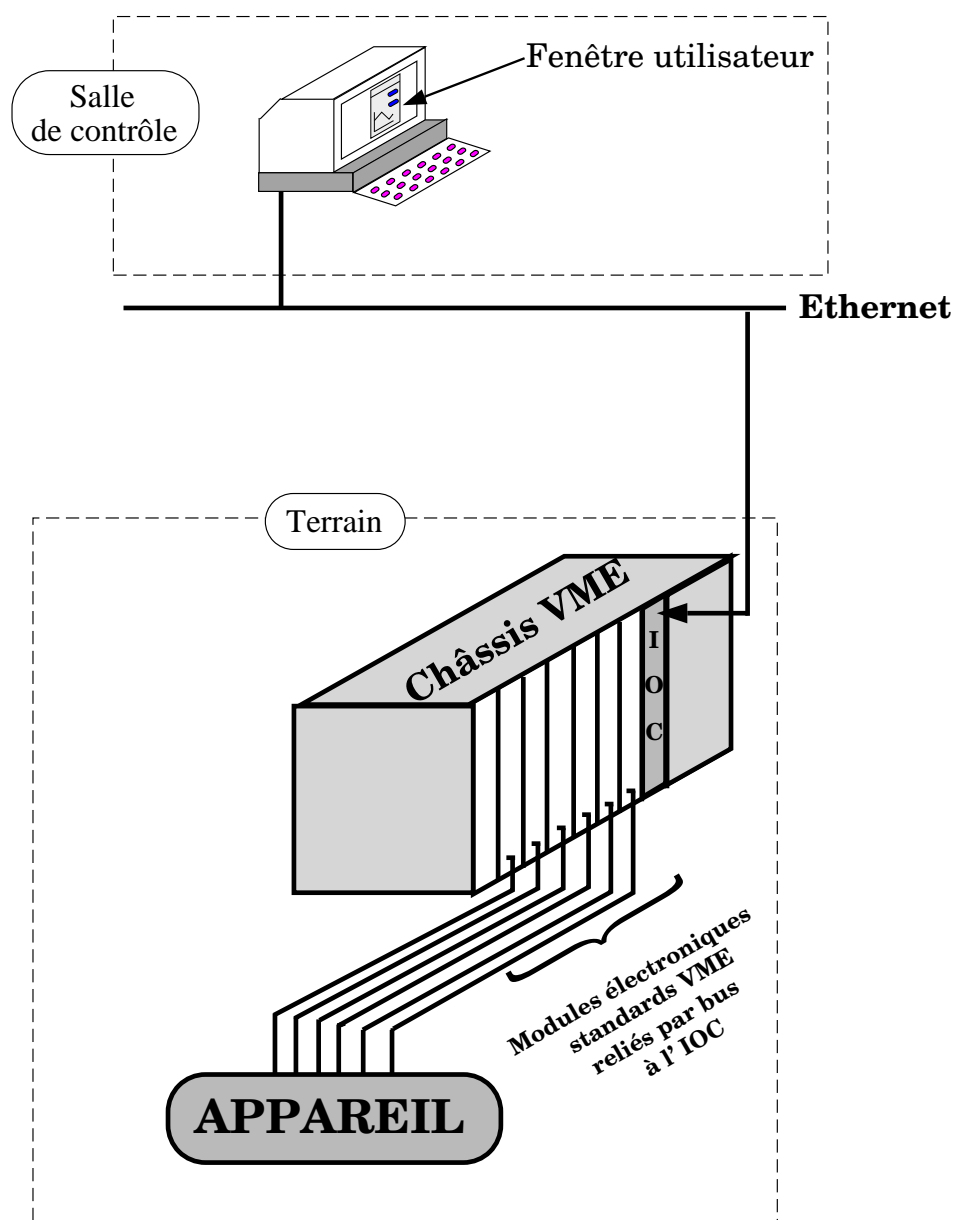


Figure H.1 - *Configuration matérielle. En lançant le programme MEDM correspondant à l'application que l'on veut contrôler, on communique avec l'IOC qui est le cerveau du système de contrôle-commande. Cet IOC est relié aux modules électroniques du châssis par bus VME. Les modules électroniques sont directement connectés à l'appareillage.*

- ▶ les enregistrements de type “signal processing” (traitement du signal) dont les enregistrements “Calc” (Calculation) et “Sub” (Subroutine) font partie. Par exemple, “Calc” est un enregistrement qui permet d’effectuer des opérations entre des champs appartenant à des enregistrements différents. Sur la figure (H.2), le “record4” est un enregistrement “Calc” agissant sur des champs des enregistrements “record2” et “record3”. Il serait nécessaire d’adjoindre à ces enregistrements un enregistrement de type “Entrée/Sortie” tel qu’un “Analog input” où seraient stockés les résultats des opérations effectuées grâce au “record4”. Ces résultats deviendraient alors accessibles en lecture.
- ▶ les enregistrements de type “data storage” (stockage de données) : “Compress”, “Histogram”, ...
- ▶ les enregistrements de type “control” : “Scan”, “Wait”, ...

Pour configurer cette base de données, c’est-à-dire créer, mettre à jour, effacer, lier des enregistrements, nous disposons d’outils tels que “DCT”⁸, “GDCT” (version graphique de DCT) ou “CapFast”. “DCT” s’appuie sur du texte alors que “GDCT” et “CapFast” sont graphiques, ce sont des logiciels de CAO possédant une librairie EPICS. Avec “CapFast”, on construit la base de données comme on créerait un schéma électronique, sous forme d’une synoptique. Pour le projet ARC, on a utilisé “CapFast”.

Les différents liens entre enregistrements permettent à la base de donnée d’être autonome dans certains cas, c’est-à-dire que toutes les actions ne sont pas forcément gérées par l’intermédiaire de l’interface utilisateur. Prenons un exemple : lire une tension toutes les secondes. Dans ce cas, la base de données, grâce aux liens entre enregistrements qui ont été configurés, peut dialoguer directement avec l’appareil concerné *via* le “driver” associé.

- Un “driver EPICS” est un programme développé spécialement pour chaque type de module électronique VME. Une fois écrit, il est mis à la disposition de tous les membres de la communauté EPICS. A chaque “driver EPICS” est associé un enregistrement de type “entrée/sortie”. Ces programmes implantés dans l’IOC font le lien entre les modules électroniques (ex. carte de commande moteur pas à pas) et l’enregistrement correspondant de la base de données (StepperMotor).
- Le programme “channel access” :
A la suite d’une commande de l’utilisateur, le programme “Channel Access” situé au niveau de l’interface opérateur va diffuser sur le réseau un message contenant le nom d’un enregistrement ainsi que le nom de la variable (ex. a1.record1, cf. figure (H.2)) dont il a besoin dans cet enregistrement. Ce message est transmis *via* le réseau local au “Channel Access” de l’IOC concerné qui va alors interroger l’enregistrement. Si ce dernier est du type “lecture de données” (Analog Input :Ai), l’information demandée sera véhiculée en retour jusqu’au “channel access” émetteur de la requête en empruntant le chemin inverse.

8. DCT : Database Configuration Tool.

- Le programme écrit en langage SNL :

Lorsque la séquence de contrôle est trop compliquée pour être gérée par le seul jeu des enregistrements et de leurs liens, on a recours à l'implantation, dans l'IOC, d'un programme SNL que l'on pourrait qualifier de “veilleur dynamique” de certains champs des enregistrements de la base de données. En effet, il veille constamment, *via* le “Channel Access”, aux changements d'état de certaines variables. Il est “Dynamique” car si un changement d'état est constaté, il réagit en activant certains enregistrements *had hoc*. Par exemple, la modification de la vitesse d'un moteur via l'interface utilisateur va engendrer un changement d'état qui va immédiatement être détecté par le programme SNL. Ce dernier va alors aller activer le champ VELO appartenant à l'enregistrement “StepperMotor”.

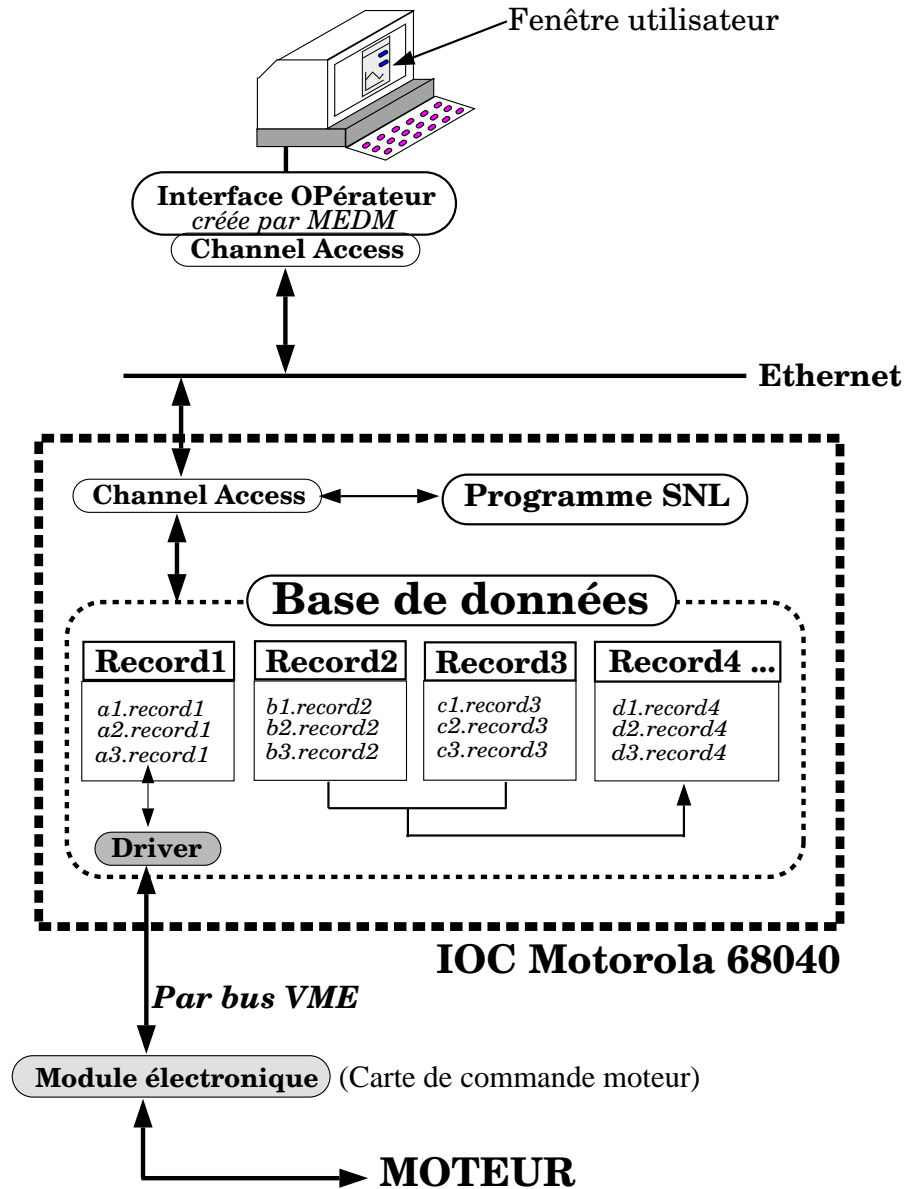


Figure H.2 - Configuration logicielle. Dans cet exemple, la base de données est composée de 4 enregistrements. L'enregistrement "record1", de type "StepperMotor", pointe sur le driver associé au moteur qui dialogue avec la carte de commande. Les enregistrements "record2" et "record3" sont par exemple des "Analog output". "record4", de type "Signal processing", permet d'effectuer des opérations sur des champs des enregistrements "record2" et "record3". Les liens entre les enregistrements "record2", "record3" et "record4" sont créés par l'intermédiaire de "DCT" ou "CapFast". On pourrait imaginer beaucoup d'autres enregistrements dont, en particulier, un enregistrement "Analog input" qui contiendrait les résultats obtenus par "record4" et qui serait accessible en lecture. Le programme "SNL" est, lui, toujours à l'affût des changements d'état des variables des enregistrements dont il a la charge pour agir.

Annexe I

Le théodolite et l'autocollimation

Le théodolite est un instrument optique, muni d'une lunette, qui permet de mesurer des angles avec précision aussi bien dans le plan horizontal que vertical. Cet appareil est l'outil de base des géomètres.

Bien que la plupart des indications que nous donnons ici s'appliquent aux théodolites en général, les données quantitatives se réfèrent au théodolite Zeiss ETh2 que nous avons choisi pour le projet ARC. Ce théodolite électronique de précision s'adapte parfaitement aux contraintes de notre application. Il peut recevoir un système d'autocollimation.

Dans la suite, comme unité de mesure d'angle, nous emploierons indifféremment le radian (rad) et les degrés, minutes, secondes d'arc ($^{\circ}$, $'$, $''$). On rappelle qu' $1'' \simeq 5\mu\text{rad}$.

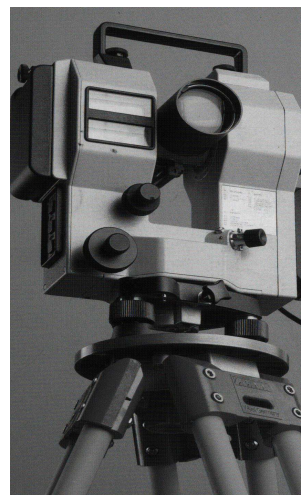


Figure I.1 - *Le théodolite ETh2.*

I.1 Description du théodolite

Les trois éléments principaux constituant un théodolite (figure [I.2]) sont :

- la lunette optique,
- la monture,
- le support.

La lunette optique :

Les trois éléments essentiels d'une lunette optique sont l'oculaire, le réticule et l'objectif, cf. figure [I.3].

La lunette du théodolite ETh2 que l'on utilise pour le projet ARC possède un objectif de 45mm d'ouverture, son grossissement angulaire est de 30 et son champ visuel de 24mrad. Cette lunette est capable de focaliser de 1m à l'infini. Au foyer de l'oculaire où se forme l'image est situé un réticule en forme de croix, cf. figure [I.4].

Le centre du réticule et le centre de l'objectif définissent l'axe optique du théodolite.

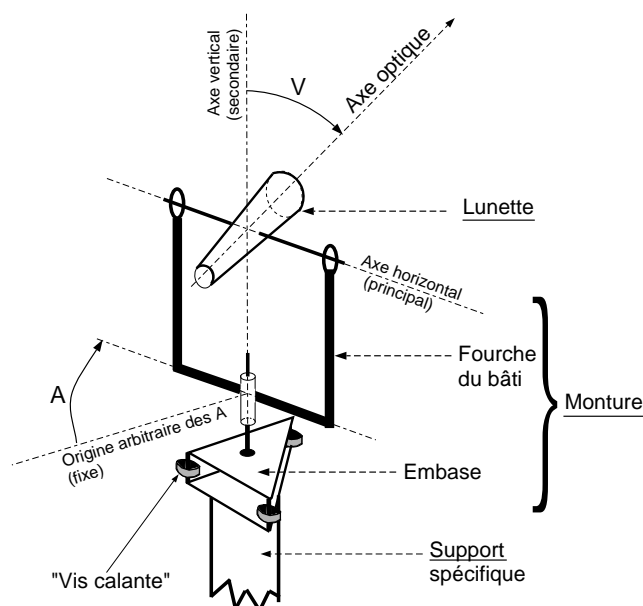


Figure I.2 - *Descriptif du théodolite.*

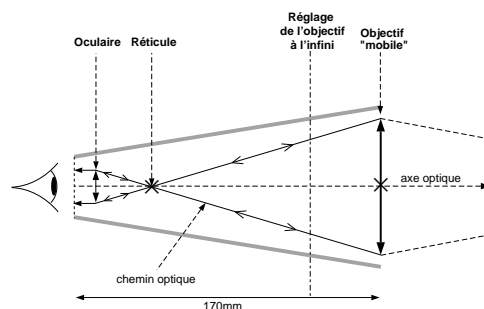


Figure I.3 - *Lunette optique. Dans les théodolites modernes comme ceux que nous utilisons, l'objectif est en fait fixe et la focalisation est ajustée par le déplacement d'une partie interne de l'optique (optique compacte).*

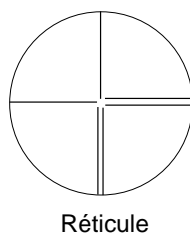


Figure I.4 - *Réticule en forme de croix. L'épaisseur du trait correspond à 1" d'arc.*

On note que la lunette du théodolite ETh2 est en outre munie d'un système d'autocollimation. Celui-ci est constitué principalement d'une diode électro-luminescente et d'un miroir semi-transparent intégrés à la lunette. Le miroir est placé entre le réticule et l'objectif de la lunette. Nous reviendrons sur ce système lorsque nous détaillerons les mesures par autocollimation.

La monture :

On appelle monture la partie qui relie la lunette à son support fixe. La lunette est liée à une fourche par un axe horizontal et cette fourche tourne dans le plan horizontal autour de son axe vertical. Ainsi, la lunette est libre de s'orienter dans toutes les directions de l'espace. En principe, les axes horizontal et vertical autour desquels tourne la lunette sont perpendiculaires et ils se croisent sur l'axe optique. Des codeurs angulaires de $1''$ d'arc de résolution fournissent une lecture directe des angles dans le plan horizontal (A) et vertical (V). Dans un système de coordonnées angulaires sphériques, la direction de l'axe optique est ainsi repérée par le couple (A,V) avec "A" l'azimut et "V" l'angle polaire.

- "A", l'angle dans le plan horizontal, mesure la rotation de la fourche par rapport au support autour de l'axe vertical. Il est donné dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Le zéro correspond à une direction arbitraire dans le plan horizontal fixée pour toute une série de mesures. "A" est croissant lorsque la fourche tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.
- "V", l'angle dans le plan vertical, mesure la rotation de la lunette par rapport à la fourche autour de l'axe horizontal. Il est donné lui aussi dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ mais ici le zéro est fixé, il correspond à une visée au zénith.

Le support :

Le support permet d'asseoir de manière stable et rigide la monture sur le sol. Il fournit de plus un moyen de réglage grossier de l'altitude du théodolite. Entre le support et la monture s'intercale une interface mécanique. Grâce à trois "vis calantes", cette interface permet :

- le réglage fin de l'altitude du théodolite,
- le calage grossier de l'axe vertical du théodolite sur la gravité par référence à un niveau à bulle d'air fixé sur la monture (précision $0.1\text{mrad} \simeq 20''$ d'arc).

Le calage fin de l'axe vertical sur la gravité est réalisé électroniquement : la monture contient un inclinomètre biaxial appelé "compensateur" qui mesure les deux angles de désalignement de l'axe vertical avec la gravité avec une précision de $0.5''$ d'arc. Un micro-processeur interne calcule en permanence la correction à apporter aux angles "A" et "V" mesurés par les codeurs angulaires. Les angles "A" et "V" affichés sont corrigés de ce désalignement éventuel. La plage de fonctionnement du "compensateur" (décalage de $160''$ d'arc) est largement supérieure à la précision du calage grossier. On appellera "verticale corrigée" l'axe de rotation vertical virtuel par rapport auquel sont donnés les angles affichés "A" et "V".

I.2 Les types de visées

La visée consiste à mesurer la direction d'un objet ou d'un axe par rapport aux axes propres du théodolite. Ce n'est pas la visée elle-même qui est la finalité du théodolite mais la comparaison de plusieurs mesures portant sur un ensemble de visées. Par exemple, la différence des angles "A" et/ou des angles "V" correspondant à deux directions visées.

La figure [I.5] résume, du point de vue de l'optique, les trois types de visées auxquelles nous avons eu recours :

- la visée d'une mire,
- la visée par autocollimation sur un miroir,
- la visée par "collimation croisée" (utilisation de deux théodolites).

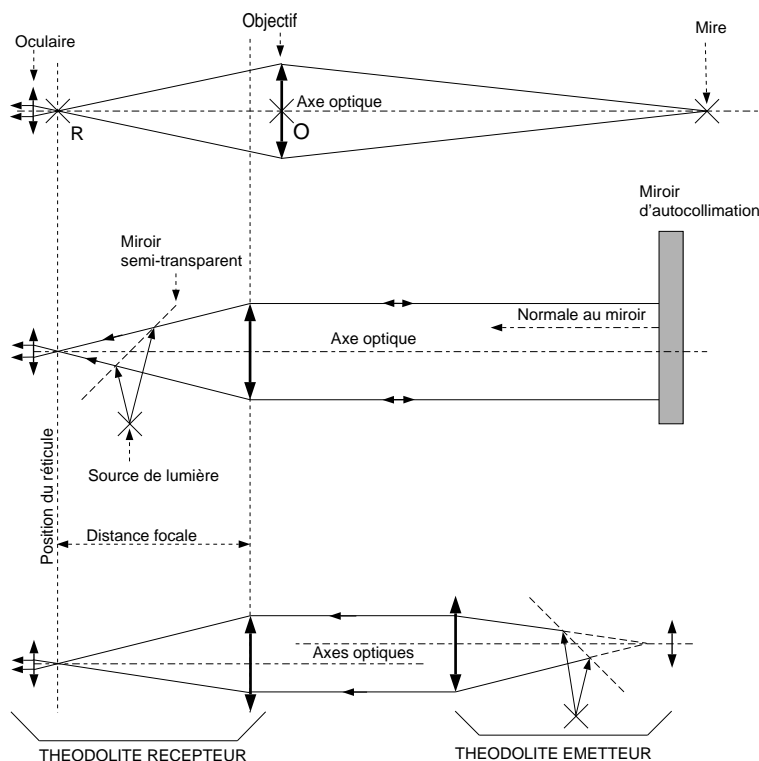


Figure I.5 - *Principes optiques des visées : visée d'une mire (en haut), visée d'autocollimation sur un miroir (au milieu) et visée de "collimation croisée" (en bas). (R) et O sont respectivement les centres du réticule et de l'objectif. On rappelle que sur les théodolites modernes, l'objectif reste fixe.*

Dans les trois cas, la visée consiste à ajuster les deux angles du théodolite pour amener le centre du motif visé au centre du réticule. D'un type de visée à l'autre, c'est la nature et l'origine du motif visé qui diffèrent. Dans le premier type de visée, la mire optique peut être remplacée par un objet ayant un rôle particulier tel que le fil du profileur par exemple. Les deux derniers types de visées appellent quelques commentaires.

I.2.1 L'autocollimation

Le but de ce type de visée est de mesurer avec précision la direction perpendiculaire à un miroir plan. Pour ce type de visée, la lunette du théodolite doit comporter un miroir semi-transparent et une source lumineuse (diode). Dans le cas du théodolite ETh2 que l'on utilise, cet équipement est interne à la lunette. Entre la source de lumière et le miroir semi-transparent s'interpose un collimateur en forme de croix. Le miroir semi-transparent situé entre le réticule et l'objectif forme une image virtuelle de la croix lumineuse qui coïncide parfaitement avec le centre du réticule. La croix lumineuse est émise dans la direction de l'objectif. La focalisation est réglée sur l'infini, c'est-à-dire qu'en sortie de l'objectif, les faisceaux de rayons lumineux issus de la croix sont parallèles entre eux et parallèles à l'axe optique du théodolite émetteur. On place un miroir plan approximativement sur l'axe optique. Lorsque la normale au miroir coïncide avec l'axe optique, le faisceau de rayons lumineux est réfléchi parallèlement à l'axe optique et est focalisé au centre du réticule. Par contre, lorsque la normale au miroir s'écarte angulairement de l'axe optique, le centre de la croix observé est décalé par rapport au centre du réticule.

Les angles "A" et "V" affichés par le théodolite à l'issue d'une visée d'autocollimation ne sont pas interprétables en terme de coordonnées angulaires d'un objet, comme dans le cas d'une mire, mais sont une mesure directe de la direction dans l'espace de la normale au plan du miroir relativement à une origine arbitraire dans le plan horizontal. Les visées par autocollimation sont de pures mesures d'angles indépendamment des positions relatives du miroir et du théodolite. La limite à un décalage transverse éventuel théodolite/miroir est que le miroir doit réfléchir une fraction notable de la lumière émise par le théodolite. De plus, les miroirs sont souvent affectés de défauts de planéité sur leurs bords. Il existe aussi une limite supérieure (mais pas inférieure) à la distance (théodolite-miroir) à diamètre de miroir constant : la fraction de la croix visible devient de plus en plus petite à mesure que la distance (théodolite-miroir) augmente. En prenant la précaution de protéger la ligne de visée (cf. ARC chapitre 2), l'image obtenue à l'issue d'une visée d'autocollimation sur une distance de 50m associée à un miroir de 80mm de diamètre est tout à fait acceptable bien que réduite en taille. On note que l'image de la croix conserve, potentiellement, la même taille apparente quel que soit la distance (même épaisseur de trait, même luminosité). C'est la fraction visible de la croix qui change, pas la taille propre de l'image, cf. figure [I.6].

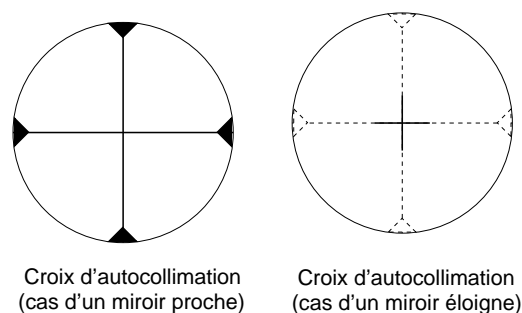


Figure I.6 - *Image de la croix d'autocollimation formé au niveau du réticule pour un miroir situé proche et loin du théodolite. Dans les deux cas, l'épaisseur du trait est de 1" d'arc.*

I.2.2 La “collimation croisée”

Ce type de visée nécessite l'emploi de deux théodolites dont un au moins muni du système d'autocollimation.

La visée par “collimation croisée” permet d'amener avec précision l'axe optique d'un théodolite, considéré comme orientable, parallèle à l'axe optique d'un second théodolite considéré comme fixe et possédant un système d'autocollimation. On qualifie le théodolite considéré fixe d'émetteur car il émet sa croix lumineuse, focalisée à l'infini, en direction du second théodolite. Le second théodolite, orientable, appelé récepteur fait face au premier et focalise lui aussi à l'infini. Par conséquent, l'image de la croix issue de l'émetteur se forme dans le plan du réticule du récepteur. On oriente le récepteur de manière à amener le centre de la croix en coïncidence avec le centre de son réticule. Les deux théodolites ont alors leurs axes optiques parallèles mais pas nécessairement confondus comme illustré sur la figure [2.14] page 173. La distance entre les deux axes optiques doit cependant rester petite devant le diamètre d'ouverture des objectifs pour que la mesure ait toute sa précision.

Dans le cadre du projet ARC, les deux théodolites employés sont équipés d'un système d'autocollimation. Nous les utilisons tour à tour comme émetteur/récepteur de manière à obtenir une meilleure précision.

I.3 Compensation des défauts : le retournement

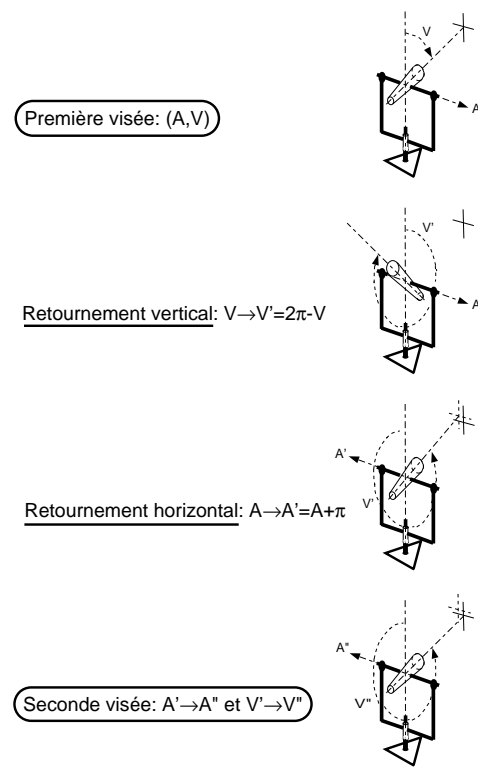
Il existe une procédure simple de visée qui annule une grande partie des erreurs dominantes : la procédure de retournement. Elle est basée sur le fait que les directions (A, V) et $(A + \pi, 2\pi - V)$ désignent en fait la même direction de l'espace comme indiquée sur la figure [I.7].

Toute direction peut donc être visée de deux manières différentes. La procédure de retournement consiste à faire suivre toute visée de sa visée “retournée”. La focalisation ne doit pas être retouchée entre les deux visées. On prend comme résultat de ce couple de visée la moyenne des résultats individuels comme définie ci-après.

En référence à la figure [I.7], soit (A, V) le résultat de la première visée et (A'', V'') celui de la seconde visée après retournement. Pour une question de “modulo”, les notations sont choisies telles que $A \in [0, \pi]$ et donc $A'' \in [\pi, 2\pi]$. La visée moyenne (\bar{A}, \bar{V}) est donnée par :

$$\bar{A} = \frac{A + (A'' - \pi)}{2}, \quad \bar{V} = \frac{V + (2\pi - V'')}{2} \quad (\text{I.1})$$

Un théodolite idéal aurait donné $(\bar{A}, \bar{V}) = (A, V) = (A'' - \pi, 2\pi - V'')$. Avec un appareil réel, on obtient $(\bar{A}, \bar{V}) = (A + \alpha, V + \nu)$, où $|\alpha|$ et $|\nu|$, les écarts de retournement sont très inférieurs à 1 radian. Ces écarts ont pour origine dominante les défauts géométriques du théodolites. Certains de ces défauts, pris isolément, induisent des erreurs de mesure de même amplitude mais de signe opposé selon qu'il s'agit de la première visée ou de la visée “retournée”. Ainsi, lors de la procédure de retournement, les erreurs se compensent et le résultat moyen est plus précis que chacun des résultats individuels. La figure [I.8] illustre

Figure I.7 - *Principe des visées avec retournement.*

la compensation d'un défaut d'équerrage entre l'axe de rotation horizontal et l'axe optique.

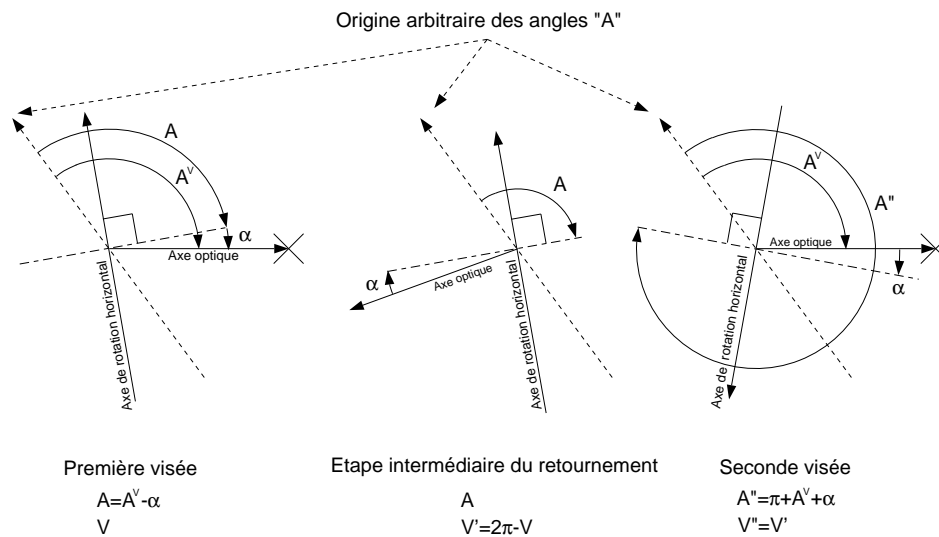


Figure I.8 - *Compensation par retournement.* La fourche du théodolite souffre d'un défaut d'équerrage " α " : l'axe optique n'est pas rigoureusement perpendiculaire à l'axe de rotation horizontal. Ce défaut entraîne une erreur de visée d'amplitude $-\alpha$ pour la première visée, et d'amplitude $+\alpha$ pour la seconde. L'erreur de mesure disparaît donc dans la moyenne (équation I.1).

Annexe J

Effet du roulis et du tangage des paires de miroirs

On considérera successivement les incertitudes induites par le roulis, tangage et lacet éventuels des paires de miroirs d'autocollimation et de déviation. L'axe de roulis des deux paires de miroirs est choisi le long de l'axe du rayon lumineux provenant de l'aval de l'arc. L'axe de tangage, situé dans le plan horizontal, est perpendiculaire à l'axe de roulis.

J.1 Effet du roulis des paires de miroirs de déviation et d'autocollimation sur la mesure de l'angle horizontal

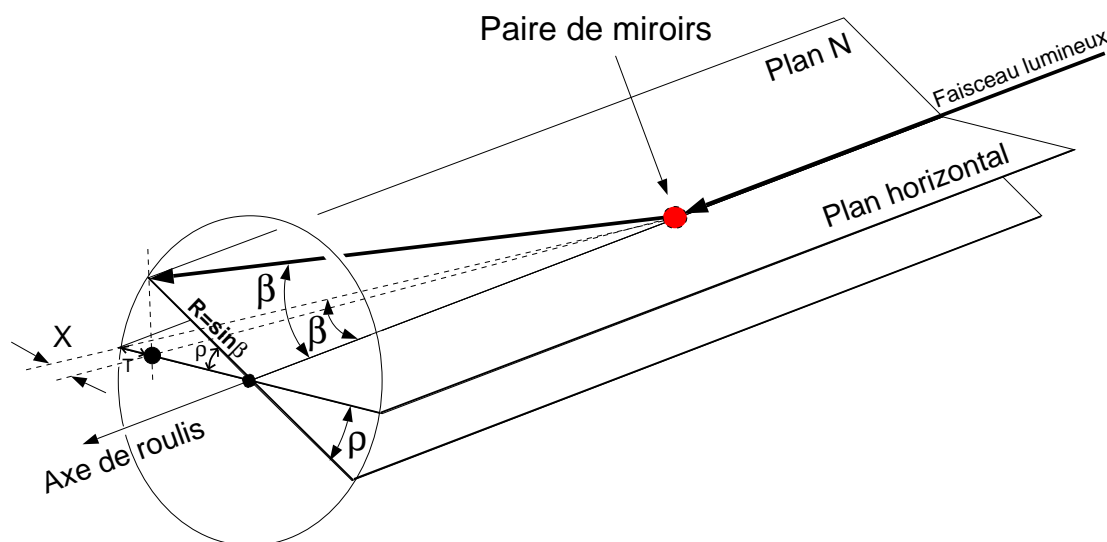


Figure J.1 - Schéma correspondant au roulis ρ des paires de miroirs de déviation et d'autocollimation.

On cherche l'erreur angulaire T' induite par le roulis d'une des paires de miroirs.

$$T' = T \cos \beta \quad (\text{J.1})$$

Déterminons T :

$$T = R(1 - \cos \rho) \xrightarrow{\rho \text{ petit}} R \frac{\rho^2}{2} = \frac{\rho^2 \sin \beta}{2} \quad (\text{J.2})$$

Finalement, on trouve :

$$T' = \frac{\rho^2 \sin \beta \cos \beta}{2} = \frac{\rho^2 \sin 2\beta}{4} \quad (\text{J.3})$$

J.2 Effet du tangage de la paire de miroirs d'autocollimation sur la mesure de l'angle horizontal

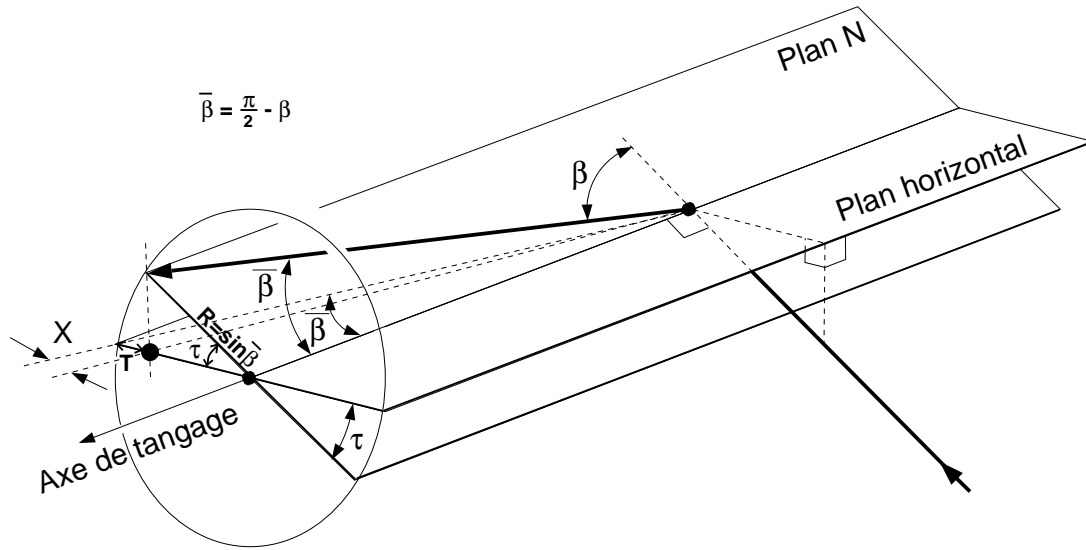


Figure J.2 - Schéma correspondant au tangage τ de la paire de miroirs d'autocollimation.

On cherche l'erreur angulaire T' induite par le tangage de la paire de miroirs d'autocollimation.

$$T' = T \cos \bar{\beta} \quad (\text{J.4})$$

Déterminons T :

$$T = R(1 - \cos \tau) \xrightarrow{\tau \text{ petit}} R \frac{\tau^2}{2} = \frac{\tau^2 \sin \bar{\beta}}{2} \quad (\text{J.5})$$

Finalement, on trouve :

$$T' = \frac{\tau^2 \sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta}}{2} = \frac{\tau^2 \sin 2\bar{\beta}}{4} \quad (\text{J.6})$$

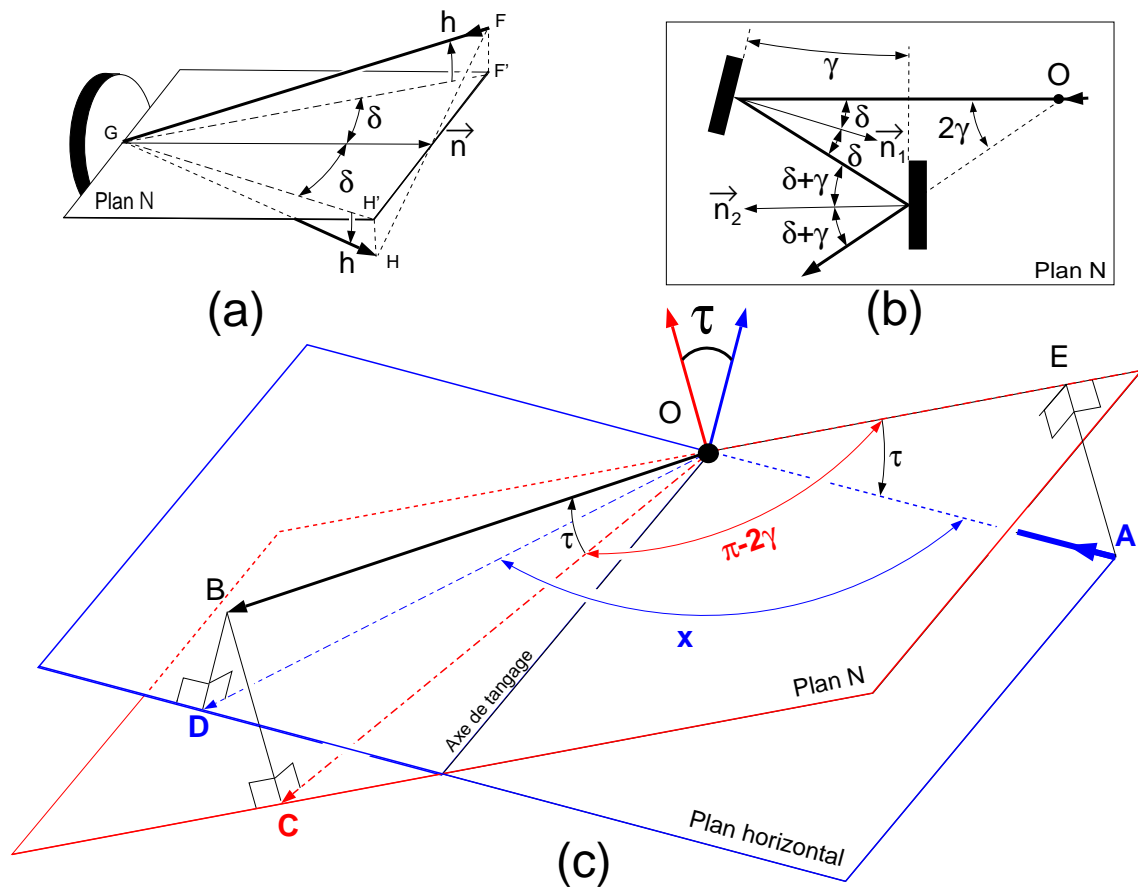


Figure J.3 - Schémas correspondant au tangage τ de la paire de miroirs de déviation.

J.3 Effet du tangage de la paire de miroirs de déviation sur la mesure de l'angle horizontal

Schéma (a) de la figure J.3 : les lois de la réflexion nous disent que pour tout plan \mathcal{N} parallèle à la normale \vec{n} au miroir, on a $(\widehat{F'G}, \vec{n}) = (\widehat{GH'}, \vec{n}) = \delta$ et $\widehat{FGF'} = \widehat{H'GH} = h$, où $F'G$ (resp. $H'G$) est la projection de FG (resp. HG) sur \mathcal{N} . δ est appelé “demi-angle de déviation dans le plan” et h “demi-angle de déviation hors du plan”.

Schéma (b) de la figure J.3 : on applique la règle précédente à une paire de miroirs, le plan de projection (\mathcal{N} : plan de la figure) étant parallèle aux 2 normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 de chacun des miroirs. On en déduit que l'angle de déviation total dans le plan \mathcal{N} est 2γ et que l'angle hors du plan (invisible sur la figure) est conservé entre l'entrée et la sortie.

Schéma (c) de la figure J.3 : la paire de miroirs de déviation est située en O et est affectée d'un angle de tangage τ par rapport au plan horizontal. Le rayon lumineux incident \overrightarrow{AO} horizontal émerge selon \overrightarrow{OB} . Le trajet AOB se projette en AOD sur le plan horizontal et en EOC sur le plan \mathcal{N} parallèle aux 2 normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 . Les règles établies en (b) nous permettent d'écrire $\widehat{COB} = \widehat{EOA} = \tau$ et $\widehat{EOC} = \pi - 2\gamma$. A partir de là, nous pouvons calculer l'angle de déviation X dans le plan horizontal et l'erreur de mesure due au tangage :

$$\Delta X = (\pi - 2\gamma) - X \quad (\text{J.7})$$

Au second ordre en τ , on trouve :

$$\Delta X = \tau^2 \sin 2\gamma (2 - \cos 2\gamma) + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (\text{J.8})$$

Annexe K

Bobine dans un champ 3D : effets dus à la forme de la bobine

Soit une bobine solénoïdale d'axe Oz , plongée dans un champ magnétique non homogène statique. Le centre O du repère est au centre de la bobine et h est la hauteur de la bobine, R son rayon moyen, N le nombre de spires, toutes normales à l'axe Oz . N est grand devant l'unité et la densité N/h des spires est uniforme de $z = -h/2$ à $z = h/2$.

Dans le cas où les dimensions h et R de la bobine ne sont plus négligeables devant la distance séparant le centre de la bobine aux sources du champ, les variations spatiales du champ sont suffisamment importantes et rapides pour affecter la valeur du flux. Quel est alors le flux ϕ du champ dans la bobine et comment se compare-t-il au produit de l'aire magnétique $\pi R^2 N$ de la bobine par la composante axiale B_z du champ au point O ?

Par intégration sur les spires dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on obtient le flux :

$$\phi = \frac{N}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} B_z(r, \theta, z) d\theta \right] r dr \right\} dz \quad (\text{K.1})$$

Hors des sources du champ, $B_z(r, \theta, z)$ est donné dans le cas général (3D) par la résolution en coordonnées cylindriques de l'équation de Laplace pour le potentiel scalaire. Nous utilisons les notations de [22] :

$$B_z(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} r^{n+2m} \left[K_n^{N(2m+1)}(z) \sin(n\theta) - K_n^{S(2m+1)}(z) \cos(n\theta) \right] \quad (\text{K.2})$$

où $C_{nm} = \frac{(-1)^m n!}{2^{2m} m! (n+m)!}$ où les $K_n^{N/S(i)}(z)$ désignent les dérivées d'ordre i de la fonction $K_n^{N/S}(z)$. Cette fonction est la composante harmonique 3D du potentiel scalaire dont dérive le champ, n désigne le rang de l'harmonique ($n = 0$ pour le solénoïde, $n = 1$ pour le dipôle transverse, $n = 2$ pour le quadripôle transverse, etc...) et N/S distingue les parties Normales et Skew. A la différence de la référence [22], les $K_n^{N/S}(z)$ utilisés ici ne sont pas normalisés à un rayon de référence.

On commence par intégrer sur θ . Seul le terme en $\cos(n\theta)$ contribue, et pour $n = 0$:

$$\int_0^{2\pi} B_z(r, \theta, z) d\theta = -2\pi \sum_{m=0}^{\infty} C_{0m} r^{2m} K_0^{S(2m+1)}(z) \quad (\text{K.3})$$

L'intégrale sur r donne :

$$\int_0^R r^{2m+1} dr = \frac{R^{2m+2}}{2m+2} \quad (\text{K.4})$$

Finalement l'intégrale sur z s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} K_0^{S(2m+1)}(z) dz = K_0^{S(2m)}\left(\frac{h}{2}\right) - K_0^{S(2m)}\left(-\frac{h}{2}\right) \quad (\text{K.5})$$

Le flux dans la bobine s'écrit donc :

$$\phi = -\frac{2\pi N}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{0m}}{2m+2} R^{2m+2} \left[K_0^{S(2m)}\left(\frac{h}{2}\right) - K_0^{S(2m)}\left(-\frac{h}{2}\right) \right] \quad (\text{K.6})$$

Nous allons maintenant donner une interprétation physique à la seule fonction $K_0^S(z)$ qui subsiste dans ϕ : soit $\mathcal{B}(z) \equiv B_z(r, \theta, z)$ la composante selon z du champ sur l'axe de la bobine considéré comme une fonction de z . Calculons $\mathcal{B}(z)$ en évaluant (K.2) à $r = 0$. Seul le terme $n = m = 0$ subsiste à cause de r^{n+2m} et par suite $K_0^N(z)$ est éliminé par $\sin(n\theta)$. Finalement :

$$\mathcal{B}(z) = -K_0^{S(1)}(z) \quad (\text{K.7})$$

$K_0^S(z)$ est donc, au signe près, la primitive de $\mathcal{B}(z)$. Plus généralement, $-K_0^{S(i)}(z)$ est la dérivée d'ordre $i-1$, notée $\mathcal{B}^{(i-1)}(z)$, de la fonction $\mathcal{B}(z)$, composante selon l'axe z du champ sur l'axe de la bobine. Le flux s'écrit alors :

$$\phi = \frac{2\pi N}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{0m}}{2m+2} R^{2m+2} \left[\mathcal{B}^{(2m-1)}\left(\frac{h}{2}\right) - \mathcal{B}^{(2m-1)}\left(-\frac{h}{2}\right) \right] \quad (\text{K.8})$$

En général $\mathcal{B}(z)$ est analytique et nous écrivons son développement en série de puissances de z autour du point $z = 0$ sous la forme :

$$\mathcal{B}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \quad (\text{K.9})$$

avec : $b_i = \frac{\mathcal{B}^{(i)}(0)}{i!}$. Nous allons évaluer ϕ en terme de b_i à l'aide de ce développement. Pour cela écrivons le développement de la primitive et des trois premières dérivées de $\mathcal{B}(z)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(-1)}(z) &= b_{-1} + b_0 z + \frac{b_1}{2} z^2 + \frac{b_2}{3} z^3 + \frac{b_3}{4} z^4 + \frac{b_4}{5} z^5 + \mathcal{O}(z^6) \\ \mathcal{B}(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \mathcal{O}(z^5) \\ \mathcal{B}^{(1)}(z) &= b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + 4b_4 z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ \mathcal{B}^{(2)}(z) &= 2b_2 + 6b_3 z + 12b_4 z^2 + \mathcal{O}(z^3) \\ \mathcal{B}^{(3)}(z) &= 6b_3 + 24b_4 z + \mathcal{O}(z^2) \end{aligned}$$

m	$\frac{C_{0m}}{2m+2}$	R^{2m+2}	$\mathcal{B}^{(2m-1)}(h/2) - \mathcal{B}^{(2m-1)}(-h/2)$
0	$\frac{1}{2}$	R^2	$b_0 h + \frac{1}{12} b_2 h^3 + \frac{1}{80} b_4 h^5 + \mathcal{O}(h^7)$
1	$-\frac{1}{16}$	R^4	$2 b_2 h + b_4 h^3 + \mathcal{O}(h^5)$
2	$\frac{1}{384}$	R^6	$24 b_4 h + \mathcal{O}(h^3)$

Tableau K.1 -

Le tableau [K.1] présente le détail du calcul de ϕ limité à $m = 0, 1, 2$ d'une part, et à $i = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ d'autre part. Notons que la constante d'intégration arbitraire b_{-1} disparaît, ainsi que tous les autres termes b_i d'indice i impair.

Le résultat est :

$$\phi = \frac{2\pi N}{h} \left[\frac{R^2}{2} \left(b_0 h + \frac{b_2 h^3}{12} + \frac{b_4 h^5}{80} \right) - \frac{R^4}{16} (2 b_2 h + b_4 h^3) + \frac{R^6}{16} b_4 h + \mathcal{O}(D^9) \right] \quad (\text{K.10})$$

où $D \simeq R \simeq h$ est la dimension caractéristique de la bobine. On regroupe cette expression selon les b_i :

$$\phi = \pi R^2 N \left[b_0 + \frac{b_2}{12} (h^2 - 3R^2) + \frac{b_4}{80} (h^4 - 10R^2 h^2 + 10R^4) + \mathcal{O}(D^6) \right] \quad (\text{K.11})$$

On peut voir dans le tableau [K.1] que les coefficients de b_0 , de b_2 et de b_4 sont complets malgré la limite $m < 3$ imposée au calcul. Les dimensions de la bobine étant inférieures à la distance de la bobine aux sources du champ (fer et conducteurs), cette série en b_i doit converger¹.

Le terme en b_0 correspond clairement au produit de l'aire magnétique de la bobine $\pi R^2 N$ par la composante z du champ au centre de la bobine. C'est le terme principal du flux.

Notons au passage que le flux ne dépend pas de b_1 , première dérivée de B_z en O le long de l'axe, ni d'aucune autre dérivée d'ordre impair. Dans un aimant quadripolaire, où, quelque soit l'orientation de la bobine, seuls b_0 et b_1 ne sont pas nuls, il n'y aura donc pas de correction due à la dimension finie de la bobine.

Le terme en b_2 est la première correction au terme principal. Il est proportionnel à la dérivée seconde, prise au centre de la bobine et calculée le long de l'axe, de la composante z du champ : $b_2 = \frac{\mathcal{B}^{(2)}(0)}{2}$. Dans le cas où la bobine est destinée à mesurer $\mathcal{B}(0)$, c'est-à-dire la composante axiale du champ en son centre, ce terme constitue la principale correction due à la dimension finie de la bobine, en cas de champ non homogène. D'après (K.11), il est facile de construire la bobine de sorte qu'elle soit insensible à cette composante b_2 de la non homogénéité du champ² : il suffit de lui donner le rapport d'aspect $h/R = \sqrt{3}$

1. A l'aide du code de calcul Mathematica utilisé à partir de l'équation (K.7), on trouve pour les termes suivants :

- coefficient de b_6 : $\frac{h^6}{448} - \frac{3h^4 R^2}{64} + \frac{5h^2 R^4}{32} - \frac{5R^6}{64}$
- coefficient de b_8 : $\frac{h^8}{2304} - \frac{h^6 R^2}{64} + \frac{7h^4 R^4}{64} - \frac{35h^2 R^6}{192} + \frac{7R^8}{128}$

2. b_2 est parfois appelée composante "sextupolaire" du champ. Cette dénomination porte ici à confusion car elle fait référence à un système de coordonnées cylindriques dont l'axe serait perpendiculaire à celui utilisé ici. De même b_4 est qualifié de "decapôle". Donc dans le système de coordonnées choisi ici, b_2 (resp. b_4) appartiennent au solénoïde $n = 0$, et non au sextupôle $n = 3$ (resp. decapôle $n = 5$). b_1 , lui, est

(h : hauteur totale, R : rayon de la bobine). Dans ces conditions le coefficient de b_2 dans (K.11) s'annule³ : $h^2 - 3R^2 = 0$. L'erreur est alors dominée par le terme en b_4 dont le coefficient s'écrit alors, en fonction de R seul :

$$\frac{1}{80}(h^4 - 10R^2h^2 + 10R^4) = -\frac{11R^4}{80} \quad (\text{K.13})$$

d'où :

$$\phi = \pi R^2 N \left[b_0 - \frac{11b_4 R^4}{80} + \mathcal{O}(R^6) \right] \quad (\text{K.14})$$

A cette erreur près, on peut donc dire qu'une bobine cylindrique ayant le rapport d'aspect "magique" $h/R = \sqrt{3}$ mesure le champ en son centre, au lieu de moyenner la mesure sur son volume (cf. figure K.1). Il existe des géométries de bobines, plus complexes à réaliser que le solénoïde présenté ici, ayant une sensibilité nulle à b_4 et même au-delà. Chaque nouveau degré de liberté ajouté à la forme du bobinage permet en principe d'annuler un terme b_i supplémentaire dans l'expression de ϕ .

appelé soit "gradient", synonyme d'amplitude quadripolaire, ce qui renvoie au problème précédent, soit "gradient de champ", ce qui est un abus manifeste de langage car le champ en question est de nature vectorielle!

3. Jusqu'ici nous avons négligé l'épaisseur 2Δ du bobinage, ce qui entraîne une erreur en $\mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta}{R}\right)^2\right)$. Si maintenant le bobinage s'étend de $R - \Delta$ à $R + \Delta$ avec une densité de spires uniforme, alors le flux ϕ devient :

$$\phi = \pi \hat{R}^2 N \left[b_0 + \frac{b_2}{12} \left(h^2 - 3\hat{R}^2 - 4\Delta^2 + \frac{16}{15} \frac{\Delta^4}{\hat{R}^2} \right) + \mathcal{O}(D^4) \right] \quad (\text{K.12})$$

où $\hat{R}^2 = R^2 + \frac{\Delta^2}{3}$ est le rayon quadratique moyen de la bobine.

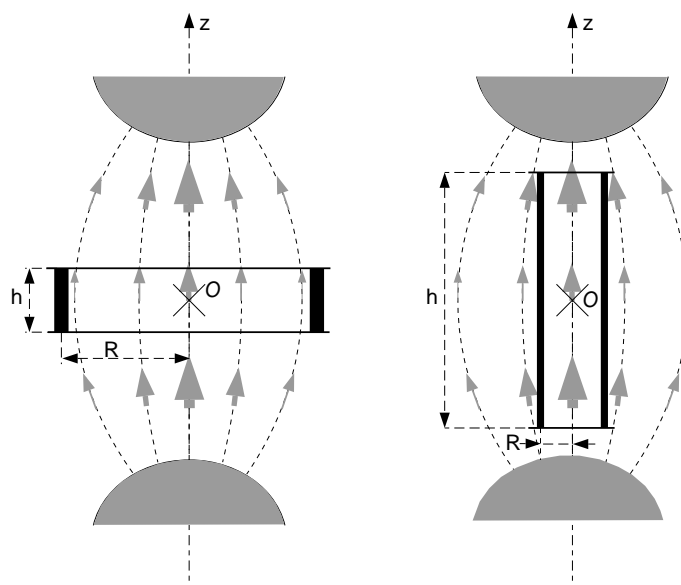


Figure K.1 - Illustration de l'influence du rapport d'aspect h/R de la bobine sur son flux. Le champ non homogène est créé ici par deux pièces polaires de surface très courbée. La figure est de révolution autour de Oz . Pour l'axe Oz , le champ est solénoïdal avec, en plus du champ au centre b_0 une dérivée seconde $b_2 > 0$ importante. L'épaisseur des flèches symbolise l'intensité du champ. Dans la figure de gauche la bobine a un rapport d'aspect "plat" ($h/R < \sqrt{3}$). Le champ moyen dans la bobine, lié à son flux, est inférieur au champ central. Dans la figure de droite on a au contraire $h/R > \sqrt{3}$ et le champ moyen est supérieur au champ central. Ces deux résultats sont qualitativement conformes à la formule (K.11). Entre ces deux extrêmes, pour un rapport d'aspect $h/R = \sqrt{3}$ nous aurions égalité du champ moyen et du champ central.

Bibliographie

- [1] P.A.M. Guichon, G.Q. Liu, A.W. Thomas, Nucl. Phys. A591 (1995) 606.
- [2] P.A.M. Guichon et Marc Vanderhaeghen: “Virtual Compton Scattering off the nucleon”, rapport DAPNIA/SPHN-97-69 (1997), “Progress in Particle and Nuclear Physics”, Vol. 41 (1998).
- [3] D. Lhuillier: “Diffusion Compton virtuelle à basse énergie”, Thèse d’université (Caen), DAPNIA/SPhN-97-01T (1997).
- [4] J.D. Jackson: “Classical Electrodynamics”, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [5] Elie Belorizky: “Les phénomènes quantiques”(p. 10), Eds Nathan Université, 1997.
- [6] F.E. Low, Phys. Rev. 96, 1428 (1954): “Scattering Light of Very Low Frequency by Systems of Spin $\frac{1}{2}$ ”.
- [7] M. Gell-Mann and L. Goldberger, Phys. Rev. 96 (1954) 1433.
- [8] V.A. Petrun’kin, Nucl. Phys. 55 (1964) 165; Zh. Eksp. Teor. Fiz. 40 (1961) 1148 [Sov. Phys. JETP 13 (1961) 804]; Tr. Fiz. Inst. Akad. Nauk SSSR 41 (1968) 165.
- [9] A. L’vov, Int. J. Mod. Phys. A8 (1993) 5267.
- [10] V.I. Gol’danski *et al.*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 38 (1960) 1695 [Sov. Phys. JETP 11, 1223 (1960)].
- [11] B.E. MacGibbon, G. Garino, M.A. Lucas, A. M. Nathan: “Measurement of the electric and magnetic polarizabilities of the proton”, Phys. Rev. C, Vol. 52, N° 4 (1995) 2097.
- [12] V.A. Petrun’kin: “Electric and magnetic polarizability of hadrons”, Sov. Journal of Particles Physics, Vol. 12 (1981) 278.
- [13] P.N. Bogolioubov, Ann. Inst. Poincaré 8 (1967) 163.
- [14] R. Weiner and W. Weise, Phys. Lett. B159 (1985) 85.
- [15] N. Soccola and W. Weise, Phys. Lett. B232 (1989) 287; Phys. Lett. A517 (1990) 495.
- [16] A.W. Thomas, Adv. Nucl. Phys. 13 (1983) 1.

- [17] P.A.M. Guichon, Rapport de l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire 1986, 261-295.
- [18] T.H. Skyrme, Proc. Roy. Soc. (London) 260 (1961) 127; 262 (1961) 237.
- [19] V. Bernard, N. Kaiser et U.G. Meißner, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1515; Phys. Lett. B319 (1993) 269; Z. Phys. (1994) 317.
- [20] T. Hemmert, B. Holstein et J. Kambor, Phys. Rev. D55 (1997) 5598.
- [21] A.M. Baldin, Nucl. Phys. 18 (1960) 318; Z.I. Lapidus, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 43 (1962) 1358 [Sov. Phys. JETP 16 (1963) 964].
- [22] M. Damashek and F.J. Gilman, Phys. Rev. D1 (1970) 1319.
- [23] A.M. Nathan: "Experimental status of nucleon polarizabilities", Rapport du workshop sur la diffusion Compton virtuelle, Clermont-Ferrand 1996, Editeur Vincent Breton, 160-171.
- [24] J.F.J. van den Brand *et al.*, Phys. Rev. D52 (1995) 4868-4871.
- [25] F.E. Low: "Bremsstrahlung of Very Low-Energy Quanta in Elementary Particle Collisions", Phys. Rev. 110 (1958) 974.
- [26] P.A.M. Guichon et Marc Vanderhaeghen, communication privée.
- [27] Marc Vanderhaeghen: "Virtual Compton Scattering Study Below Pion Production Threshold", Phys. Lett. B368 (1996) 13-19.
- [28] Marc Vanderhaeghen: "Theoretical Overview of Virtual Compton Scattering On Nucleon", Proceedings of the Conference on Perspectives in Hadronic Physics, (Mai 1997, Trieste, Italie), Eds: S. Boffi, C. Ciofi degli Atti, M.M. Gianninni, World Scientific.
- [29] Marc Vanderhaeghen: "Double Polarization Observables in Virtual Compton Scattering", Phys. Lett. B402 (1997) 243-250.
- [30] A. Metz and D. Drechsel, Z. Phys. A356 (1996) 351.
- [31] A. Metz and D. Drechsel, Z. Phys. A359 (1997) 165.
- [32] Th. R. Hemmert and B.R. Holstein, G. Knöchlein and S. Scherer, Phys. Rev. D55 (1997), 2630.
- [33] Th. R. Hemmert and B.R. Holstein, G. Knöchlein and S. Scherer, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 22.
- [34] D. Drechsel, G. Knöchlein, A. Metz and S. Scherer, Phys. Rev. C55 (1997) 424.
- [35] D. Drechsel, G. Knöchlein, A.Yu. Korchin, A. Metz and S. Scherer, pre-print MKPH-T-97-11, nucl-th 9704064, PRC 57 (1998).

- [36] D. Drechsel: “General Introduction to Compton Scattering”, Rapport du workshop sur la diffusion Compton virtuelle, Clermont-Ferrand (Juin 1996), Editeur Vincent Breton, 1-13.
- [37] C.E. Hyde-Wright: “Virtual Compton Scattering at Jefferson Laboratory”, Rapport du workshop sur la diffusion Compton virtuelle, Clermont-Ferrand (Juin 1996), Editeur Vincent Breton, 82-95.
- [38] N. d’Hose et T. Walcher (co-porte-paroles): “Nucleon Structure Study by Virtual Compton Scattering”, Proposition d’expérience auprès de l’accélérateur MAMI de Mayence (1995).
- [39] P.Y. Bertin, P.A.M. Guichon et C.E. Hyde-Wright (co-porte-paroles): “Nucleon Structure Study by Virtual Compton Scattering”, Proposition d’expérience auprès de l’accélérateur CEBAF de Jefferson Lab, expérience de collaboration du hall A 93-050 (1993).
- [40] V. Breton et C.E. Hyde-Wright (co-porte-paroles): “Nucleon Structure Study by Virtual Compton Scattering at High Momentum Transfers”, Proposition d’expérience auprès de l’accélérateur CEBAF de Jefferson Lab, expérience de collaboration du hall A 94-106 (1994).
- [41] J. Shaw et R. Miskimen (co-porte-paroles), Proposition d’expérience auprès de l’accélérateur de Bates, USA, (1997).
- [42] Actes de proceedings of VCS96: “Diffusion Compton Virtuelle”, Clermont-Ferrand, 26-29 Juin 1996, Editeur Vincent Breton.
- [43] H. Fonvieille, Rapport de l’Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire 1992, 41-68.
- [44] L.C. Maximon, C. Tzara: “Influence of the Radiative Background on Muon and Electron Scattering from Nuclei”, Phys. Letters, vol. 26B (1968) 201-203.
- [45] C. Marchand: “Etude des fonctions de réponse électromagnétiques et des distributions en moment des protons de grande impulsion dans le noyau d’He³ par diffusion inélastique d’électrons”, Thèse (Sept. 1987).
- [46] Y.S. Tsai: “Radiative Corrections to Electron Scatterings”, SLAC Report SLAC-PUB-848 (1971).
- [47] W. Mo, Y.S. Tsai: “Radiative Corrections to Elastic and Inelastic ep and μp Scattering”, Rev. of Modern Physics, vol.41-1 (1969) 205-235.
- [48] Y.S. Tsai: “Pair production and Bremsstrahlung of charged leptons”, Rev. of Modern Physics, vol.46-4 (1974) 815-850.
- [49] R.A. Early, Nucl. Instr. Methods 109 (1973) 93.
- [50] L. Van Hoorebeke: “Monte Carlo Simulation of Virtual Compton Scattering at MAMI”, Rapport du workshop sur la diffusion Compton virtuelle, Clermont-Ferrand 1996, Editeur Vincent Breton, 29-36.

- [51] L. Van Hoorebeke, Rapport sur le calcul des corrections radiatives réelles à la diffusion Compton virtuelle, à paraître à titre de rapport interne de l'université de Gent, Belgique, 1998.
- [52] L. Landau, J. Phys. (CEI) 8 (1944) 201.
- [53] P.E. Bosted, Phys. Rev. C51 (1995) 409.
- [54] L.C. Maximon: "Comments on Radiative Corrections", Rev. of Modern Physics, vol.41-1 (1969) 193-204.
- [55] J. Picard, Note CEA-N-2329 (1983).
- [56] C. Itzykson et J.-B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill International Eds, Physics Series (1980).
- [57] C. de Calan, H. Navelet et J. Picard: "Corrections radiatives généralisées de la diffusion sur des cibles hadroniques", Note CEA-N-2624 (1990).
- [58] D.R. Yennie, S.C. Frautshi and H. Suura: "The Infrared Divergence Phenomena and High-Energy Processes", Annals of Physics 13(1961) 379-452.
- [59] J. Schwinger, Phys. Rev. 76 (1949) 790.
- [60] J. Schwinger, Phys. Rev. 73 (1948) 416L.
- [61] A.I. Akhiezer, V.B. Berestetskii: "Quantum Electrodynamics", vol. XI, Interscience Monographs and Texts in Physics and Astronomy, 1965.
- [62] Y.S. Tsai: "Radiative Corrections to Electron-Proton Scattering", Phys. Rev. 122 (1961) 1898.
- [63] W.A. McKinley and H. Feshbach, Phys. Rev. 74 (1948) 1759.
- [64] R.H. Dalitz, Proc. Roy. Soc. (London) A206 (1951) 509.
- [65] R.G. Newton: "Radiative Corrections to Electron Scattering", Phys. Rev. 97 (1955) 1162.
- [66] R. Gastmans, R. Meuldermans: "Dimensional Regularization of Infrared Problem", Nucl. Phys. B63 (1973) 277-284.
- [67] T.-P. Cheng and L.-F. Li, "Gauge theory of elementary particle physics", Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [68] J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw Hill, New York, 1964.
- [69] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B44 (1972) 189.
- [70] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Phys. Lett. B40 (1972) 566.
- [71] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. 21 (1949) 434.

- [72] G. Leibbrandt, *Rev. Mod. Phys.* 47 (1975).
- [73] F. Bloch et A. Nordsieck, *Phys. Rev.* 52 (1937) 54.
- [74] W.J. Marciano, A. Sirlin, *Nucl. Phys.* B88 (1975) 86.
- [75] F. Mandl and G. Shaw, “Quantum Field Theory”, J. Wiley & Sons, New York, 1984.
- [76] C. de Calan, H. Navelet, J. Picard, *Nucl. Phys.* 348 (1991) 47.
- [77] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, Cambridge University Press, 1995.
- [78] G. Sterman, “An Introduction to Quantum Field Theory”, Cambridge University Press, 1993.
- [79] J. M. Jauch and F. Rohrlich, “The Theory of Photons and Electrons”, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1955.
J. M. Jauch and F. Rohrlich, *Helv. Phys. Acta* 27, 613 (1954).
F. Rohrlich, *Phys. Rev.* 98, 181 (1955).
- [80] T. Muta, “Foundations of Quantum Chromodynamics”, World Scientific, Singapore, 1987.
- [81] M. Vanderhaeghen, D. Lhuillier, D. Marchand, J. Van de Wiele: “Radiative corrections to virtual Compton Scattering”, article à soumettre à *Nucl. Phys. A*.
- [82] D. Marchand, D. Lhuillier, M. Vanderhaeghen, J. Van de Wiele: “Radiative Corrections to VCS”, Rapport du workshop sur la diffusion Compton virtuelle, Clermont-Ferrand 1996, Editeur Vincent Breton, 42-54.
- [83] F. Halzen, A. D. Martin: “Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics”, John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- [84] J. Van de Wiele, D. Lhuillier, D. Marchand, M. Vandherhaeghen: “Analytic expressions for the integrals with singularities in the Feynman parametrization”, rapport IPNO-DRE-97-30 (1997).
- [85] H. Mineur: “Techniques de calcul numérique”, librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1952.
- [86] H.B. Dwight: “Tables of integrals and other mathematical data”, Macmillan, New York, 1961.
- [87] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik: “Table of Integrals, Series, and products”, Academic Press, 1994.

Bibliographie

- [1] Nuclear Physics News, vol. 6/N° 4, 1996.
- [2] B. Frois, Rapport de l'école Joliot-Curie de physique nucléaire 1992, p. 77-166.
- [3] Site internet de Jefferson Lab : <http://www.jlab.org>
- [4] P.E. Ulmer, I. Karabekov, A. Saha, P. Bertin, P. Vernin, "Absolute Beam Energy Determination at CEBAF", 1993 (Note interne).
- [5] P.E. Ulmer, W. Bertozzi, J.M. Finn, R.W. Lourie, J. Mougey, A. Saha, "Physics Requirements on the Determination and Stability of the Parameters of the Beam", Tech. Note CEBAF-TN-90-255 (1990).
- [6] J.E. Ducret : "Séparation des fonctions de structure longitudinale, transverse et d'interférence longitudinale-transverse dans la section efficace des réactions $^2\text{H}(e,e'p)n$ et $^4\text{He}(e,e'p)^3\text{H}$ ", thèse d'université (Orsay, N° d'ordre 2272), DAPNIA/SPhN 9249 (1992).
- [7] O. Ravel, Thèse de l'université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II, 1997, "Mesure absolue de l'énergie du faisceau d'électrons de TJNAF par diffusion élastique $p(e,e')p$ ".
- [8] O. Ravel *et al.* , "Beam Energy Measurement at TJNAF at a level of $\Delta E/E = 10^{-4}$ by determination of $p(e,e')p$ kinematics on hydrogen", soumis NIM, 1997. "Frontiers detectors for frontiers physics", 7^{ème} Pisa meeting, île d'Elbe.
- [9] V. Bargmann, L. Michel, V.L. Telegdi, Phys. Review Letters, vol.2, N° 10, 1959. "Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field".
- [10] J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Second Edition J. Wiley & Sons, New York.
- [11] P. Welch, R. Ent, "Energy Measurement of Electron Beams by Compton Scattering", 1994. (note interne)
- [12] A.T. Margarian, "Laser and a New Nonmagnetic Method for the tagging of Monochromatic Electrons and Photons", Yerevan Physics Institute, Preprint YERPHI 1403(14)-93, 1993.
- [13] D. Marchand, rapport CEA/DAPNIA/SPhN 94-46 (1994), "Mesure absolue de l'énergie du faisceau de CEBAF (Hall A). Etude de faisabilité d'une méthode basée sur la rétrodiffusion Compton".

- [14] M. Levi, J. Nash, S. Watson : “Precision Measurements of the SLC Reference Magnets”, SLAC-PUB-4654 (LBL-26956), 1989.
- [15] J. Butler *et al.* : “Precision Synchrotron Radiation Detectors”, SLAC-PUB-4921 (LBL-26956), 1989.
- [16] S. Watson, M. Levi, J. Nash : “Precision Measurements of the SLC Reference Magnets”, SLAC-PUB-4908 (LBL-26956), 1989.
- [17] P. Vernin, “Projet d’Accélérateur Européen d’Électrons et défis expérimentaux”, contribution au rapport de l’école Joliot-Curie 1992, 315-340.
- [18] J.D. Jackson, “Classical Electrodynamics” (p.645), Second Edition J. Wiley & Sons, New York.
- [19] F.P. Juster : “Etude thermique d’un profileur de faisceau à fil”, rapport DAPNIA/STCM/98-01 (1998).
- [20] L. Dolizy : “Conception, réalisation et tests de l’électronique d’un capteur de positionnement d’un faisceau d’électrons”, rapport DAPNIA/SIG/98- (1997).
- [21] P. Garganne : “Etude sur les diagnostics de faisceaux d’électrons”, rapport CEA-N-2607 (1989).
- [22] G. Quemener : “Cartographie magnétique des quadripôles des spectromètres à haute résolution du Thomas Jefferson National Accelerator Laboratory, Hall A” (Le Projet Q.M.M.: Quadrupole Magnetic Measurement), thèse de l’université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II (DU 978), 1997.
- [23] L. Harwood, J. Karn : “Measured Field Performance of CEBAF Beam Transport Magnets”, rapport de la conférence “IEEE Transactions on Magnetics”, vol. 30, N° 4, 1994.
- [24] J. Karn : “Hardware & software Documentation for the Dipole and Quadrupole Measurement Stands”, note interne de CEBAF, 20/1/1994.
- [25] J. Karn : “CEBAF Magnet Measurement Facility”, note interne de CEBAF, juin 1993.
- [26] L. Harwood : “Production Magnet Testing”, note interne de CEBAF TN-0187, novembre 1989.
- [27] F. Kircher *et al.* : “Reference dipole field measurement for CEBAF beam energy determination”, rapport de la conférence “Magnet Technology (MT15), soumis en octobre 1997.
- [28] K. Tremblay, communication privée (février 1998).
- [29] <http://www2.keck.hawaii.edu:3636/index.html>
- [30] B. Turck : “Proposition de mesures magnétiques par bobines cylindriques du champ du dipôle pulsé supraconducteur”, rapport Saturne GATS/71-03 NT (1971).

-
- [31] C. Yan, R. Carlini, D. Neuffer, “Beam Energy Measurement using the Arc Beamline as a Spectrometer”, CEBAF-PR-93-004.